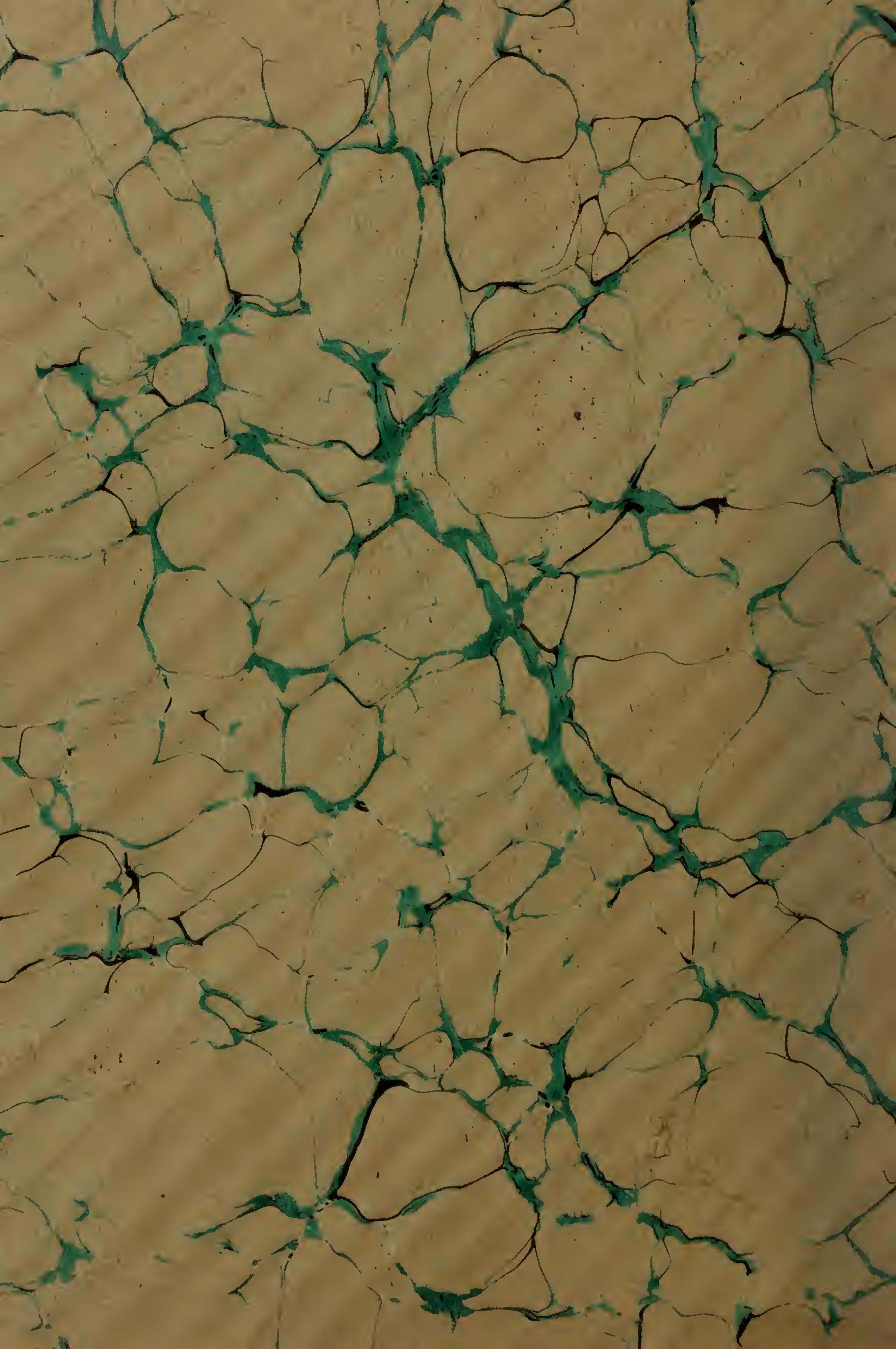
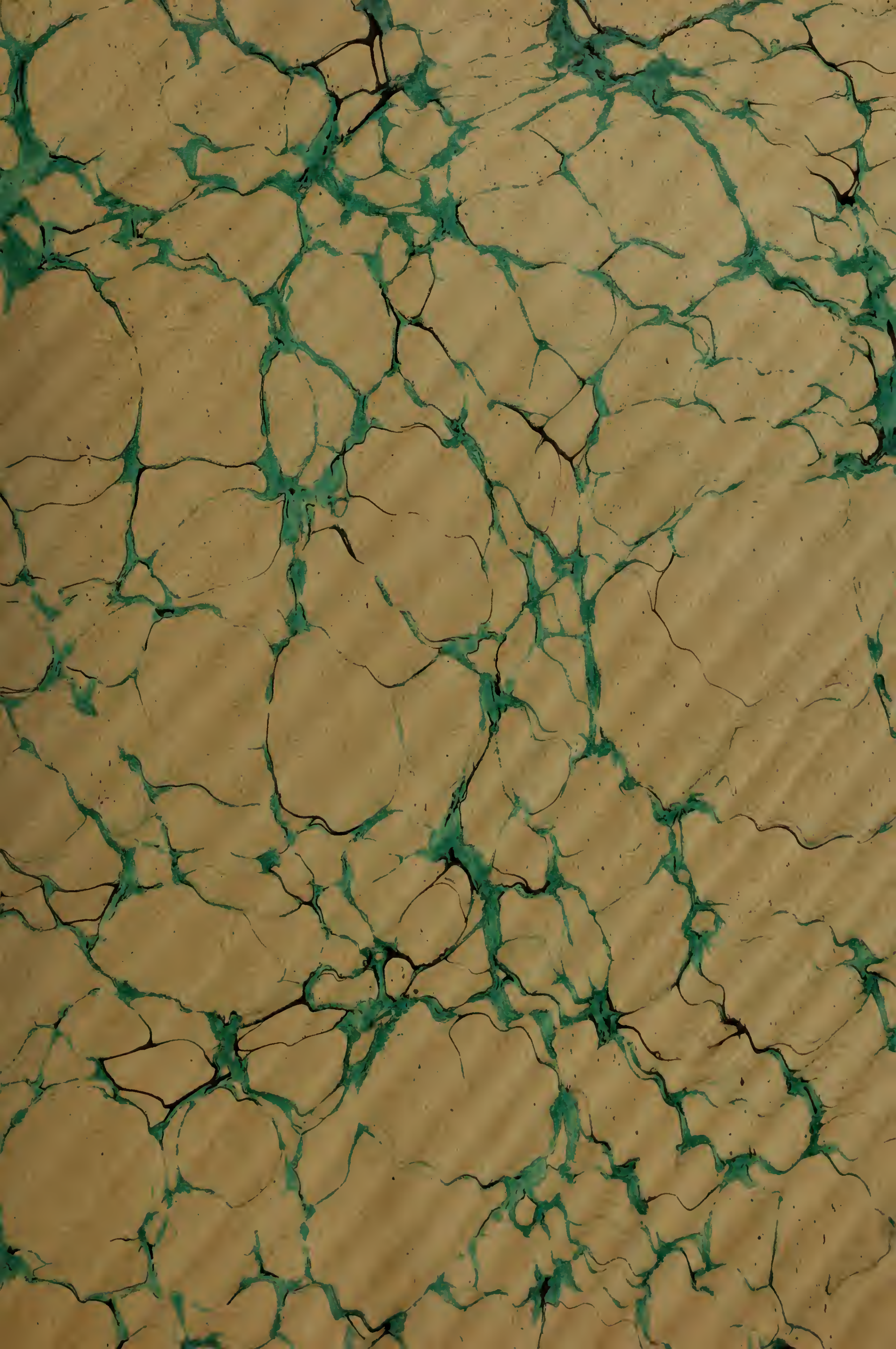






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER.
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. – TOME XI. – ANNÉE 1866.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1866

TABLE DES MATIÈRES,

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XI.

ERRATUM.

Page 73, ligne 4, *effacer le passage suivant :* Dans le cas général, il n'y a que six plans tangents à l'onde, etc., *jusqu'à ces mots :* au contraire, on sait qu'il n'y en a que trois.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

NOMBRE DES REPRÉSENTATIONS

d'un entier quelconque sous la forme d'une somme de dix carrés;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Je vais d'abord reproduire, sans y rien changer, une Note que j'ai insérée sous ce même titre dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 19 juin 1865). Elle est ainsi conçue :

« La question dont je veux m'occuper ici pour en donner une solution complète m'a paru longtemps bien difficile. Il s'agissait de trouver une expression simple du nombre N des représentations dont un entier quelconque n est susceptible sous la forme d'une somme de dix carrés. Eisenstein a traité (*Journal de Crelle*, t. XXXV, p. 135) le cas particulier d'un entier impair $\equiv 3 \pmod{4}$; mais après avoir indiqué la formule propre à ce cas, il ajoute qu'il n'y a pas de formule semblable pour les entiers $\equiv 1 \pmod{4}$. Une remarque de l'illustre géomètre au sujet des formes quadratiques à plus de huit indéterminées semble même tendre à décourager toute recherche ultérieure. Des entiers pairs, Eisenstein ne dit rien. Plus tard (cahier de juillet 1861, p. 238) j'ai traité le cas du double d'un entier $\equiv 3 \pmod{4}$; on restait toujours très-loin du but. Enfin mes efforts ont abouti. J'ai eu le bonheur d'arriver à la formule générale, et cela au moment même où je désespérais presque d'y jamais parvenir. Soit λ l'excès (*pris positi-*

vement) de la somme des quatrièmes puissances des diviseurs de n qui sont $\equiv 1 \pmod{4}$ sur la somme des quatrièmes puissances des diviseurs de n qui sont $\equiv 3 \pmod{4}$. Cet excès déjà employé par Eisenstein est un des éléments de ma formule. Mais il faut, de plus, avoir égard à la puissance de 2 par laquelle n est divisible; je désignerai l'exposant de cette puissance par α, en sorte que l'on ait $n = 2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. Observons en passant que la valeur de λ ne dépend pas de celle de α; elle est la même pour n et pour m. On distinguera le cas de $m \equiv 1 \pmod{4}$ et celui de $m \equiv 3 \pmod{4}$. En outre, quand n est la somme de deux carrés, il faudra compter le nombre μ des solutions de l'équation

$$n = s^2 + s'^2,$$

où les entiers s, s' sont indifféremment positifs, nuls ou négatifs, et aussi calculer la somme des produits $s^2 s'^2$ pour toutes les solutions. Cette somme étant représentée par ν, on aura

$$\mathrm{N} = \frac{4}{5}\left(16^{\alpha+1} + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right)\lambda + \frac{8}{5}n^2\mu - \frac{64}{5}\nu.$$

» Quand m est $\equiv 3 \pmod{4}$, l'équation $n = s^2 + s'^2$ est impossible; μ et ν sont donc nuls, et l'on a seulement

$$\mathrm{N} = \frac{4}{5}(16^{\alpha+1} - 1)\lambda,$$

attendu qu'alors

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} = -1.$$

Supposez de plus n impair, c'est-à-dire $\alpha = 0$, et vous retomberez sur la formule d'Eisenstein. Faites au contraire $\alpha = 1$, et vous retrouverez un résultat que j'ai obtenu dans le temps.

» Quand m est $\equiv 1 \pmod{4}$, on a

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} = 1,$$

partant

$$\mathrm{N} = \frac{4}{5}(16^{\alpha+1} + 1)\lambda + \frac{8}{5}n^2\mu - \frac{64}{5}\nu.$$

Mais dans cette hypothèse même de $m \equiv 1$ (mod. 4), il se peut que l'équation $n = s^2 + s'^2$ soit impossible; alors, μ et ν étant nuls, il reste seulement

$$N = \frac{4}{5}(16^{\alpha+1} + 1)\lambda.$$

» Je renvoie pour de plus amples développements à un prochain cahier du *Journal de Mathématiques*. »

2. Ajoutons maintenant quelques exemples. Et d'abord soit $n = 1$, d'où $\alpha = 0$, $m = 1$, $\lambda = 1$, puis $\mu = 4$ et $\nu = 0$, en vertu des deux identités

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2, \quad 1 = 0^2 + (\pm 1)^2.$$

Notre formule donnera dans ce cas

$$N = \frac{4}{5}(16 + 1) + \frac{8}{5}\cdot 4 = 20,$$

résultat exact, attendu que dans l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$$

on peut faire occuper à $(\pm 1)^2$ dix places différentes.

Soit, en second lieu, $n = 2$, d'où $\alpha = 1$, $m = 1$, $\lambda = 1$, puis $\mu = 4$ et $\nu = 4$, en vertu de l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2.$$

On aura par notre formule

$$N = \frac{4}{5}(16^2 + 1) + \frac{8}{5}\cdot 4\cdot 4 - \frac{64}{5}\cdot 4 = 180.$$

Or l'équation

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$$

fournit effectivement pour l'entier 2 cent quatre-vingts représentations lorsqu'on y opère les permutations qu'elle comporte.

Soit ensuite $n = 3$, d'où $\alpha = 0$, $m = 3$, $\lambda = 3^4 - 1 = 80$; on a cette fois $\mu = 0$ et $\nu = 0$, puisque 3 n'est pas somme de deux carrés. Notre formule donne donc

$$N = \frac{4}{5}(16 - 1).80 = 960;$$

et cela s'accorde avec l'identité

$$3 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2,$$

où l'on aura soin d'opérer les permutations convenables.

Soit encore $n = 4$, d'où $\alpha = 2$, $m = 1$, $\lambda = 1$, $\mu = 4$, $\nu = 0$. On aura par notre formule

$$N = \frac{4}{5}(16^3 + 1) + \frac{8}{5}.4^2.4 = 3380,$$

résultat confirmé par les deux identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$$

et

$$4 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2,$$

eu égard aux permutations qu'elles comportent et qui sont au nombre de dix pour l'une et de deux cent dix pour l'autre.

Soit enfin $n = 5$, partant $\alpha = 0$, $m = 5$, $\lambda = 5^4 + 1 = 626$; puis $\mu = 8$ et $\nu = 32$, en vertu des deux identités

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2, \quad 5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2.$$

D'après notre formule, il faudra que

$$N = \frac{4}{5}(16 + 1).626 + \frac{8}{5}.25.8 - \frac{64}{5}\cdot 32 = 8424;$$

or on s'assurera qu'il en est ainsi au moyen des deux équations

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$$

et

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces vérifications numériques.

3. Décomposons l'entier m de toutes les manières possibles en un produit $d\delta$ de deux facteurs conjugués. L'excès de la somme des quatrièmes puissances des diviseurs $d \equiv 1 \pmod{4}$ sur celle des diviseurs $d \equiv 3 \pmod{4}$ sera

$$\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} d^4,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^4,$$

valeur positive ou négative suivant que m est $\equiv 1$ ou $3 \pmod{4}$. Comme λ désigne cet excès pris positivement, on a

$$\lambda = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^4,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \rho_4(m),$$

en employant une notation dont nous avons souvent fait usage dans ce Journal et qui consiste à désigner généralement par

$$\rho_\nu(m)$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^\nu.$$

La premier terme

$$\frac{4}{5}\left[16^{\alpha+1} + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\lambda$$

de la valeur N peut donc s'écrire

$$\frac{4}{5}\left[16^{\alpha+1} + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_4(m).$$

Les deux autres termes

$$\frac{8}{5}n^2\mu - \frac{64}{5}\nu$$

peuvent être remplacés par ce terme unique

$$\frac{16}{5}\sum(s^4 - 3s^2s'^2)$$

où la somme

$$\sum$$

porte sur les entiers s, s' (positifs, nuls ou négatifs) qui figurent dans l'équation

$$n = s^2 + s'^2.$$

Je supprime la démonstration, qui du reste est facile.

La formule qui résulte de ces changements divers, savoir

$$\mathrm{N} = \frac{4}{5}\left[16^{\alpha+1} + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_4(m) + \frac{16}{5}\sum(s^4 - 3s^2s'^2)$$

est celle que j'ai d'abord obtenue; je l'ai mise ensuite sous une forme plus commode pour le calcul. La somme

$$\sum(s^4 - 3s^2s'^2)$$

qu'on y rencontre est tantôt positive, tantôt négative. Elle change de signe et acquiert une valeur numérique quadruple quand l'exposant α (dans l'équation $n = 2^\alpha m$) augmente d'une unité, m ne changeant pas. De là une relation simple entre les valeurs

$$\mathrm{N}(2^\alpha m),\ \mathrm{N}(2^{\alpha+1}m)$$

de N, qui répondent aux entiers respectifs

$$2^\alpha m,\ 2^{\alpha+1}m.$$

On a, en effet,

$$\mathrm{N}(2^{\alpha+1}m) + 4\mathrm{N}(2^\alpha m) = \left[16^{\alpha+2} + 4(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_4(m),$$

équation dont on pourra tirer parti.

4. Je vais dire en peu de mots comment j'ai été conduit à l'équation

$$N = \frac{4}{5}\left[16^{\alpha+1} + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_4(m) + \frac{16}{5}\sum(s^4 - 3s^2s'^2),$$

que j'écris plus explicitement

$$N(2^\alpha m, 10) = \frac{4}{5}\left[16^{\alpha+1} + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_4(m) + \frac{16}{5}\sum(s^4 - 3s^2s'^2),$$

et dont je possède maintenant cinq à six démonstrations différentes.

En désignant par

$$N(n, p, q)$$

le nombre des représentations de l'entier n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) en p carrés dont les q premiers sont impairs et à racines positives, tandis que les suivants sont pairs et à racines indifféremment positives, nulles ou négatives, j'ai donné (dans le cahier d'octobre 1861, p. 370-371) une formule générale comprenant comme cas particulier celle-ci :

$$2^{4\alpha}\rho_4(m) = N(2^{\alpha+2}m, 10, 4) + 4N(2^{\alpha+2}m, 10, 8).$$

Une autre formule générale que je n'ai pas encore communiquée au public, mais qui m'est connue depuis longtemps et qui sort d'une source semblable, m'avait appris d'autre part que l'on a aussi

$$4(-1)^{\frac{m-1}{2}}\rho_4(m) = 5N(2^\alpha m, 10) - 96N(2^{\alpha+2}m, 10, 4) + 256N(2^{\alpha+2}m, 10, 8),$$

en désignant comme tout à l'heure par

$$N(2^\alpha m, 10)$$

le nombre des représentations de l'entier $2^\alpha m$ sous la forme d'une somme de dix carrés quelconques. Mais il me fallait une troisième équation entre

$$N(2^\alpha m, 10),\quad N(2^{\alpha+2}m, 10, 4),\quad N(2^{\alpha+2}m, 10, 8)$$

pour en conclure la valeur de ces trois quantités et spécialement celle tant cherchée de $N(2^\alpha m, 10)$. Or j'en suis resté longtemps aux deux équations ci-dessus. Enfin, au même moment pour ainsi dire, par deux voies différentes, l'une toute spéciale, l'autre générale, j'ai reconnu que

$$N(2^{\alpha+2}m, 10, 4) - 16N(2^{\alpha+2}m, 10, 8) = \frac{1}{2}\sum(s^4 - 3s^2s'^2),$$

la somme

$$\sum(s^4 - 3s^2s'^2)$$

étant celle que j'ai introduite plus haut et qui est relative à l'équation

$$2^\alpha m = s^2 + s'^2.$$

Mes formules se trouvant ainsi complétées, j'ai eu non-seulement la valeur de

$$N(2^\alpha m, 10),$$

mais en outre celles de

$$N(2^{\alpha+2}m, 10, 4)$$

et de

$$N(2^{\alpha+2}m, 10, 8),$$

qu'on formera facilement.

MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS DE DEGRÉ PREMIER RÉSOLUBLES ALGÉBRIQUEMENT;

PAR M. DESPEYROUS.

La solution de cette question générale, *trouver toutes les équations, de degré premier, résolubles algébriquement,* fait l'objet de ce Mémoire. Nous croyons que notre solution est exacte et complète, et nous avons l'espoir qu'elle sera jugée telle par les géomètres.

Les remarquables travaux auxquels la question dont nous venons de parler a donné lieu et les noms de leurs auteurs nous ont fait hésiter longtemps à nous en occuper; mais nos recherches [*] sur la *théorie de l'ordre* et sur l'application que nous en avons faite à la classification des permutations qu'offrent m lettres en groupes de permutations *inséparables* pour tous les échanges de ces lettres, contiennent implicitement une méthode pour la solution du problème énoncé; et c'est le résultat des applications de cette méthode que nous publions aujourd'hui [**].

Nous cherchons d'abord quelles sont les quantités qui doivent entrer dans la composition de la valeur d'une quelconque des racines d'une équation algébrique, irréductible et de degré premier n que l'on suppose résoluble algébriquement. Et nous démontrons par des

[*] *Journal de Mathématiques* publié par M. Liouville, 2e série, t. VI, p. 417; t. X, p. 55 et 177.

[**] Nous devons rappeler que la méthode s'applique aussi avec succès à la solution de cette question plus générale : *trouver toutes les équations de degré composé résolubles algébriquement;* et que nous avons communiqué cette solution à la réunion des Sociétés savantes (*Revue des Sociétés savantes,* t. V, p. 346).

considérations entièrement fondées sur la théorie de l'ordre, que cette valeur doit contenir $n-1$ radicaux d'un même indice, et que chacun d'eux est équivalent à une fonction rationnelle des racines de l'équation proposée.

Puis nous établissons ce théorème :

« Pour résoudre une équation algébrique, irréductible et de degré
» premier n, il est nécessaire et suffisant de résoudre deux équations,
» l'une de degré $n-1$, l'autre de degré $1.2.3...(n-2)$. Les racines
» de cette dernière équation sont des fonctions rationnelles de celles
» de la proposée; et elle est appelée équation *résolvante* ou *réduite*. »

Ce théorème est une conséquence *nécessaire* de la théorie générale des équations; vérité aperçue par Lagrange, comme le prouve la dernière phrase de la note XIII du traité de ce grand géomètre sur la *résolution des équations numériques*. Parmi les conséquences de ce théorème, se trouve ce résultat connu : *Toute équation du troisième degré est résoluble algébriquement.*

Puisque la résolution d'une équation algébrique, irréductible et de degré premier n supérieur à 3, dépend nécessairement de la résolution de son équation résolvante du degré $1.2.3...(n-2)$, nombre supérieur au degré n de cette équation, il fallait déterminer les caractères auxquels on reconnaissait que cette équation résolvante était résoluble, ou du moins décomposable en équations de degrés moindres. Ces caractères sont actuellement connus, puisque nous avons démontré que la résolvante n'est décomposable en équations de degrés moindres, qu'autant que les groupes de permutations des racines de l'équation proposée, relatifs à celle de cette résolvante, peuvent être partagés en nouveaux groupes de permutations *inséparables* pour tous les échanges possibles de ces racines.

De là et de notre théorie sur la classification des permutations de m lettres en groupes de permutations *inséparables* pour tous les échanges de ces lettres, nous déduisons ce théorème général :

Pour qu'une équation algébrique et de degré premier n supérieur à 3 soit résoluble algébriquement, il faut et il suffit : 1° qu'elle soit abélienne; 2° ou qu'entre trois quelconques de ses racines, il y ait la relation

$$x_{a+pp} = \theta(x_{a+p}, x_a),$$

dans laquelle les indices de x sont pris suivant le module n; θ désignant une fonction rationnelle, ρ une des racines primitives du degré n, a un des nombres 0, 1, 2,..., $n-1$ *et p un des nombres* 1, 2, 3,..., $n-1$.

Définitions. — Soient

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{m-1}$$

m quantités et V une fonction de ces quantités. V sera une fonction *algébrique* de ces quantités, si elle est formée avec elles à l'aide des six opérations fondamentales des mathématiques ou de quelques-unes d'entre elles, répétées un nombre fini de fois; dont trois directes, addition, multiplication, formation des puissances, et trois respectivement inverses, soustraction, division, extraction des racines.

Si dans la formation de la fonction V, il n'y entre que des signes des quatre premières opérations ou de quelques-unes d'entre elles, V est dite fonction *entière* de x_0, x_1, .., x_{m-1}; et si dans V ces quantités sont liées par les signes des cinq premières opérations ou de quelques-unes d'entre elles, V est une fonction *rationnelle* de ces m quantités. Mais nous donnerons une plus grande extension à ces mots *entier* et *rationnel*, et nous dirons qu'une fonction est entière ou rationnelle de ces quantités x_0, x_1,..., x_{m-1}, quand bien même son expression contiendrait, dans la première ou dans la seconde formation, des *racines de l'unité* d'un degré quelconque k égal ou différent de m.

Une équation algébrique

$$(1)\qquad F(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0$$

est *réductible* ou *irréductible* selon que son premier membre se décompose ou ne se décompose pas en facteurs de degrés moindres en x, tels que les coefficients des divers termes de ces facteurs sont des fonctions rationnelles de A_1, A_2,..., A_m, *indépendantes* des racines

de l'unité d'un degré quelconque. Nous verrons qu'une équation irréductible peut cesser de l'être, quand on adjoint aux coefficients A_1, $A_2, \ldots, A_m$ de cette équation des racines de certaines équations que nous appellerons *résolvantes*.

Résoudre algébriquement l'équation (1), c'est déterminer une fonction algébrique de ces coefficients qui, substituée à l'inconnue x, satisfasse identiquement à cette équation.

THÉORÈME I. — *Si une équation algébrique, irréductible et de degré premier n est résoluble algébriquement, la valeur d'une quelconque de ses racines contient $n-1$ radicaux d'un même indice, et chacun d'eux est équivalent à une fonction rationnelle des ces mêmes racines, ces $n-1$ radicaux pouvant se réduire à un seul.*

Soient

$$(1) \qquad F(x) = 0$$

l'équation proposée, et $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ ses n racines; nous supposerons qu'elle est résoluble algébriquement.

Cette équation étant, par hypothèse, irréductible et résoluble algébriquement, chacune de ses racines est égale à une fonction rationnelle faite avec ses coefficients et avec des radicaux. Et dans aucun cas, ces radicaux ne peuvent disparaître d'une quelconque de ces fonctions; car s'il en était ainsi pour l'une d'elles, le premier membre de cette équation (1) aurait un facteur rationnel, et par suite cette équation ne serait pas irréductible.

Considérons l'un des radicaux, $\sqrt[k]{z_1}$, qui entre dans la composition de l'une x de ses racines, la quantité z_1 pouvant dépendre de radicaux d'indices différents de k. Ce radical, $\sqrt[k]{z_1}$, deviendra une fonction des racines de l'équation (1) quand on y remplacera les coefficients de cette équation par les fonctions symétriques de ces racines qu'ils représentent. On a donc

$$(2) \qquad \sqrt[k]{z_1} = f_1(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Cela posé, considérons l'une des permutations qui font acquérir à f_1

une même valeur, $x_0 x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ par exemple, et joignons à cette permutation toutes celles qui sont relatives aux polygones étoilés de Poinsot, c'est-à-dire toutes celles que l'on déduit de cette première permutation en prenant successivement ces racines, à partir de la première x_0, de p_1 en p_1, de p_2 en $p_2, \ldots$, de p_ν en p_ν; ces lettres désignant les ν nombres inférieurs et premiers à n; ν étant égal à $n - 1$ puisque n est premier. Or nous avons démontré [*] que ces $n - 1$ permutations constituaient un *seul et même ordre*, qu'elles coexistaient toutes dans une quelconque d'entre elles, comme les racines d'une même équation; donc l'expression de cette racine x de l'équation (1) et qui contient $\sqrt[k]{z_1}$, doit nécessairement contenir $\sqrt[k]{z_2}, \sqrt[k]{z_3}, \ldots, \sqrt[k]{z_{n-1}}$ qui se déduisent de la fonction (2) f_1 en changeant la permutation $x_0 x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ en celles de l'ordre dont elle fait partie : à moins que f_1 ne reste encore invariable pour ces nouvelles permutations. Donc encore ces $n - 1$ radicaux doivent entrer dans l'expression de cette racine x d'une manière symétrique, puisque, en changeant l'un dans l'autre ces radicaux, l'expression de cette racine ne saurait être altérée, d'après leur signification. Ainsi l'expression de cette racine x contient $n - 1$ radicaux d'un même indice, à moins qu'ils ne se réduisent à un seul.

Il y a plus : si dans cette même expression de x on remplace les coefficients de l'équation proposée par les fonctions symétriques de ses racines qu'ils représentent, cette expression doit nécessairement se réduire à cette racine x. Mais elle contient d'une manière symétrique $n - 1$ radicaux ou un seul d'entre eux, qui dans aucun cas ne peuvent s'annuler; donc cette réduction exige que chacun d'eux soit équivalent à une fonction rationnelle des racines de l'équation proposée, en donnant à ce mot *rationnel* l'extension dont nous avons parlé dans les définitions : ainsi f_1 est une fonction rationnelle.

Il est donc démontré que l'expression d'une quelconque x des racines de l'équation (1), supposée irréductible et de degré premier n, contient $n - 1$ radicaux de même indice, et que chacun d'eux est

---

[*] *Journal de Mathématiques* publié par M. Liouville, 2e série, t. X, p. 194.

équivalent à une fonction rationnelle des racines de cette équation, ces $n - 1$ radicaux se réduisant quelquefois à un seul [*].

Théorème II. — *Pour résoudre une équation algébrique, irréductible et de degré premier n, il est nécessaire et suffisant de résoudre deux équations, l'une de degré $n-1$, l'autre de degré $1.2.3...(n-2)$.*

Rappelons auparavant que, n étant un nombre premier, les résidus à n des termes de la suite

$$a,\ a+p,\ a+2p,\ldots,\ a+(n-1)p$$

sont les nombres $0, 1, 2,\ldots, n-1$ dans un ordre déterminé, p désignant un nombre entier quelconque inférieur à n et a un de ces mêmes nombres ou zéro. De même, ρ étant une des racines *primitives* de n, les résidus à n des termes de la suite

$$a,\ a+p\rho,\ a+p\rho^2,\ldots,\ a+p\rho^{n-2}$$

sont encore les mêmes nombres $0, 1, 2,\ldots, n-1$, dans tel ou tel ordre selon les valeurs de p et de ρ. Mais les résidus à n des termes de la suite

$$p,\ p\rho,\ p\rho^2,\ldots,\ p\rho^{n-2}$$

sont seulement les termes naturels $1, 2, 3,\ldots, n-1$. En sorte que les racines $x_0, x_1,\ldots, x_{n-1}$ de l'équation (1) peuvent être représentées par l'une des deux suites

$$x_a,\ x_{a+p},\ x_{a+2p},\ldots,\ x_{a+(n-1)p},$$
$$x_a,\ x_{a+p\rho},\ x_{a+p\rho^2},\ldots,\ x_{a+p\rho^{n-2}}.$$

Enfin, si r et α désignent deux quelconques des racines imaginaires de l'équation binôme $x^n - 1 = 0$, on sait que les racines de cette

---

[*] On verra, dans le théorème suivant, à quoi tient la possibilité de réduire ces $n-1$ radicaux à un seul d'entre eux.

équation sont représentées par l'une des trois suites

$$1,\quad \alpha,\quad \alpha^2,\ldots,\quad \alpha^{n-1},$$
$$1,\quad \alpha^q,\quad \alpha^{2q},\ldots,\quad \alpha^{(n-1)q},$$
$$r,\quad r\alpha^q,\quad r\alpha^{2q},\ldots,\quad r\alpha^{(n-1)q},$$

q désignant un des nombres entiers inférieurs à n.

Cela posé, nous allons d'abord démontrer que les conditions de l'énoncé sont nécessaires; et pour cela nous admettrons que l'équation proposée (1) soit résoluble algébriquement.

Divisons en effet en n parties égales la circonférence du cercle dont le rayon est égal à l'unité; plaçons sur cette circonférence et en ces points de division les racines

$$x_a,\ x_{a+p},\ x_{a+2p},\ldots,\ x_{a+(n-1)p},$$

de la proposée dans tel ordre que l'on voudra, par exemple dans l'ordre où elles sont écrites et qui est relatif à $\sqrt[k]{z_1}$, et joignons ces points de division, d'abord un à un, puis au centre : ces rayons représentent les racines de l'équation binôme $x^n - 1 = 0$.

Or, qu'on lise dans le même sens le polygone régulier obtenu, soit du sommet où se trouve la racine x_a, soit de tout autre sommet, du second par exemple où se trouve la racine x_{a+p}, c'est toujours le *même* polygone; donc $\sqrt[k]{z_1}$, qui est une fonction rationnelle des racines de l'équation proposée et qui est relative, par hypothèse, à la permutation précédente, doit rester invariable quand on y change à la fois les deux permutations

$$\begin{matrix} x_a & x_{a+p} & x_{a+2p}\ldots & x_{a+(n-1)p}, \\ 1 & \alpha^q & \alpha^{2q}\ldots & \alpha^{(n-1)q}, \end{matrix}$$

respectivement en leurs permutations circulaires

$$(3)\qquad \left\{ \begin{matrix} x_{a+p} & x_{a+2p}\ldots & x_a, \\ \alpha^q & \alpha^{2q}\ldots & 1. \end{matrix} \right.$$

De même, si on lit dans le même sens ce même polygone à partir

du troisième sommet où se trouve la racine x_{a+2p}, on obtient toujours ce polygone; donc encore $\sqrt[k]{z_1}$ doit rester invariable quand on change à la fois les permutations (3) respectivement en leurs permutations circulaires, et ainsi de suite pour tous les autres sommets. Donc la fonction rationnelle des racines de la proposée, $\sqrt[k]{z_1}$ doit rester invariable quand on y fait simultanément ces changements circulaires, et il est évident que la fonction la *plus simple* qui jouit de cette propriété est le polynôme

$$x_a + \alpha^q x_{a+p} + \alpha^{2q} x_{a+2p} + \ldots + \alpha^{(n-1)q} \alpha_{a+(n-1)p}.$$

Mais ce polynôme, considéré comme fonction des racines de l'équation (1) à résoudre, est relatif à l'un des polygones étoilés de Poinsot, à celui dont on vient de parler; et ce polygone ne peut être lu que de l'un de ses n sommets. Donc $\sqrt[k]{z_1}$ est égal au polynôme précédent ou à une fonction *semblable* de ces mêmes racines et par suite égal à une fonction rationnelle de ce polynôme, d'après la théorie de Lagrange sur les fonctions semblables. En sorte que, pour déterminer les racines de l'équation proposée par les calculs les plus simples, on doit poser

$$\sqrt[k]{z_1} = x_a + \alpha^q x_{a+p} + \alpha^{2q} x_{a+2p} + \ldots + \alpha^{(n-1)q} x_{a+(n-1)p}.$$

Or $\sqrt[k]{z_1}$ a k valeurs que l'on obtient en multipliant l'une d'elles par chacune des racines de l'équation binôme $x^k - 1 = 0$, et il résulte de ce qui précède que chacune de ces valeurs jouit de la même propriété. Donc r étant l'une des racines imaginaires de cette équation binôme, le produit

$$r_1 x_a + r_1 \alpha^q x_{a+p} + r_1 \alpha^{2q} x_{a+2p} + \ldots + r_1 \alpha^{(n-1)q} x_{a+(n-1)p}$$

doit rester invariable quand on y fait les changements simultanés et circulaires dont nous venons de parler. Et ce résultat ne peut être atteint qu'autant que $r_1 = r$; puisque r_1, $r_1\alpha^q$, $r_1\alpha^{2q}, \ldots, r_1\alpha^{(n-1)q}$ doivent être les racines de l'équation binôme $x^n - 1 = 0$. D'ailleurs, ce n'est que pour ces dernières racines que le polynôme précédent doit rester invariable par suite de ces mêmes changements; donc l'équation $x^k - 1 = 0$ doit coïncider avec $x^n - 1 = 0$; ce qui exige que k

soit égal à n. Donc enfin, l'on a

$$(4)\qquad \sqrt[n]{z_1} = x_a + \alpha^q x_{a+p} + \alpha^{2q} x_{a+2p} + \ldots + \alpha^{(n-1)q} x_{a+(n-1)p}.$$

Le radical, $\sqrt[n]{z_1}$, étant actuellement connu en fonction des racines à trouver, on déduira de sa valeur celles des $n-2$ autres, $\sqrt[n]{z_2}$, $\sqrt[n]{z_3}, \ldots$, $\sqrt[n]{z_{n-1}}$, par les permutations déjà indiquées de ces racines. Et il résulte évidemment des expressions de ces $n-1$ radicaux que si l'on parvenait à connaître leurs valeurs en fonction des coefficients de l'équation (1), on aurait $n-1$ équations, qui, réunies à l'équation connue

$$x_a + x_{a+p} + x_{a+2p} + \ldots + x_{a+(n-1)p} = -A_1$$

formeraient un système de n équations linéaires par rapport aux racines de l'équation (1) à résoudre, desquelles on déduirait chacune d'elles. Donc, pour trouver ces racines, il faut connaître

$$z_1,\ z_2,\ z_3, \ldots,\ z_{n-1}.$$

Or, quelles que soient leurs expressions, ces $n-1$ fonctions des n racines de l'équation proposée sont semblables. Car les $n-1$ radicaux, $\sqrt[n]{z_1}$, $\sqrt[n]{z_2}, \ldots$, $\sqrt[n]{z_{n-1}}$, fonctions de ces racines, sont relatifs aux $n-1$ permutations de ces mêmes racines qui forment un *seul et même ordre;* donc ils jouissent tous des mêmes propriétés. De là il suit que si un changement de ces n racines fait conserver une même valeur à l'un de ces radicaux, ce même changement n'altérera pas non plus les $n-2$ autres; et que si un changement de ces mêmes racines transforme l'un de ces radicaux en un autre, ce même changement de racines transformera les $n-2$ autres les uns dans les autres. Donc ces $n-1$ radicaux sont semblables [*], et par suite leurs puissances $n^{\text{ièmes}}$, c'est-à-dire z_1, $z_2, \ldots$, z_{n-1}, seront aussi semblables.

---

[*] Ces $n-1$ radicaux étant semblables et étant équivalents à des fonctions rationnelles des racines de la proposée, l'un d'eux étant donné, chacun des $n-2$ autres est égal à une fonction rationnelle de celui-là. C'est pourquoi nous avons dit, théorème I, que la racine pouvait ne contenir qu'un seul de ces radicaux.

Ces $n-1$ fonctions étant semblables, leurs expressions, quelles qu'elles soient, et par conséquent celles qui se déduisent de la formule (4), sont racines d'une même équation, de degré $n-1$, dont les coefficients sont également semblables et ne dépendent par suite que d'un seul, de celui par exemple qui est égal à la somme de ces $n-1$ fonctions,

$$(5) \qquad y = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{n-1}.$$

En sorte que l'équation dont les racines sont ces $n-1$ quantités, est

$$(6) \qquad Z^{n-1} - yZ^{n-2} + B_2 Z^{n-3} + \ldots + B_{n-1} = 0;$$

dans laquelle les coefficients $B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}$ peuvent être exprimés en fonction rationnelle de y. Et cette dernière quantité dépend elle-même d'une autre équation,

$$(7) \qquad \varphi(y) = 0,$$

dont les coefficients ne dépendent que de ceux de l'équation donnée (1). Permutons en effet les n racines de cette dernière équation dont se compose la forme connue (5) de la fonction y, et désignons par y_1, $y_2, \ldots, y_s$ les s valeurs distinctes que prend cette fonction. La somme de ces valeurs, $y_1 + y_2 + \ldots + y_s$, les sommes de leurs produits deux à deux, trois à trois,... sont évidemment des fonctions symétriques des n racines de l'équation (1); elles peuvent donc être exprimées en fonctions rationnelles de ses coefficients, fonctions qui seront les coefficients de l'équation (7).

Le degré de cette dernière est d'ailleurs facile à déterminer. En effet, chacun des termes de y est invariable pour les n permutations circulaires que produit celle des n racines de l'équation à résoudre relative à ce terme, puisque l'on a

$$\begin{aligned}(x_{a+p} + \alpha^q x_{a+2p} + \ldots + \alpha^{(n-1)q} x_a)^n \\ = \alpha^{(n-1)qn} (x_a + \alpha^q x_{a+p} + \ldots + \alpha^{(n-1)q} x_{a+(n-1)p})^n = z_1^n,\end{aligned}$$

et que la démonstration serait la même pour chacune des $n-1$ autres

permutations circulaires, ainsi que pour chacun des autres termes de y. De plus, y est symétrique par rapport aux $n-1$ termes z_1, $z_2,\ldots$, z_{n-1} relatifs aux $n-1$ permutations d'un même ordre. Donc y acquiert des valeurs égales pour les $n(n-1)$ permutations d'un quelconque des groupes de notre troisième classification [*]; et par suite le nombre s de ses valeurs distinctes, c'est-à-dire le degré de l'équation (7), est donné par la formule

$$s = \frac{1.2.3\ldots n}{(n-1).n} = 1.2.3\ldots(n-2);$$

et ce degré s serait le même si, au lieu de prendre pour z_1, $z_2,\ldots$, z_{n-1} les valeurs qui se déduisent de (4), on prenait d'autres fonctions, puisque ces dernières seraient respectivement semblables aux premières.

Ainsi, pour déterminer les racines de l'équation (1), il faut avoir les valeurs de z_1, $z_2,\ldots$, z_{n-1}; il faut donc résoudre l'équation (6) du degré $n-1$, résolution qui exige celle de l'équation (7) du degré $1.2.3\ldots(n-2)$. Les conditions du théorème à démontrer sont donc nécessaires.

Démontrons actuellement qu'elles sont suffisantes. Nous remarquerons d'abord que l'une des $n-1$ valeurs z_1, $z_2,\ldots$, z_{n-1}, par exemple z_1, les reproduit toutes en y remplaçant p successivement par p, $p\rho$, $p\rho^2,\ldots$, $p\rho^{n-2}$; car ces $n-1$ valeurs étant relatives aux $n-1$ permutations d'un même ordre, celle qui est relative à z_1, et qui est faite avec les n racines de l'équation proposée, reproduira toutes ces permutations en lisant ces racines, à partir de la première, successivement de 1 à 1, de 2 à 2,..., de $n-1$ à $n-1$; tandis que les résidus à n de p, $p\rho$, $p\rho^2,\ldots$, $p\rho^{n-2}$ sont précisément ces mêmes nombres 1, 2, 3,..., $n-1$ dans un ordre déterminé. Et puis, si l'on suppose en effet les équations (7) et (6) résolues, et si l'on extrait la racine $n^{\text{ième}}$ de la valeur de chacune des $n-1$ racines de cette dernière; on aura, en observant que la somme des racines de la proposée est connue et

[*] *Journal de Mathématiques* publié par M. Liouville, t. X, 2e série, p. 183.

égale à $-A_1$, les n équations

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} x_a + x_{a+p} + x_{a+2p} + \ldots + x_{a+(n-1)p} = -A_1, \\ x_a + \alpha^q x_{a+p} + \alpha^{2q} x_{a+2p} + \ldots + \alpha^{(n-1)q} x_{a+(n-1)p} = \sqrt[n]{z_1}, \\ x_a + \alpha^q x_{a+p\rho} + \alpha^{2q} x_{a+2p\rho} + \ldots + \alpha^{(n-1)q} x_{a+(n-1)p\rho} = \sqrt[n]{z_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_a + \alpha^q x_{a+p\rho^{n-2}} + \alpha^{2q} x_{a+2p\rho^{n-2}} + \ldots + \alpha^{(n-1)q} x_{a+(n-1)p\rho^{n-2}} = \sqrt[n]{z_{n-1}}, \end{array}\right.$$

linéaires par rapport aux n racines à trouver.

Pour résoudre ces n équations, il suffit d'observer que, dans chacune d'elles, les racines qui sont multipliées par les diverses puissances de α sont différentes, et que dans chaque colonne verticale les racines qui sont multipliées par une même puissance de α sont également différentes. Car le nombre de ces équations étant n, et toutes les racines étant dans chaque équation, une quelconque de ces racines, x_a exceptée, aura successivement pour coefficients dans ces n équations, 1, α^q, $\alpha^{2q}, \ldots$, $\alpha^{(n-1)q}$ qui sont les racines de $x^n - 1 = 0$. De là il suit que si l'on veut obtenir l'une des racines de (1), par exemple x_{a+p}, il suffira de multiplier convenablement les deux membres de chacune des équations (8) par 1, α^{-q}, $\alpha^{-2q}, \ldots$, $\alpha^{-(n-1)q}$ qui sont ces mêmes racines de $x^n - 1 = 0$, et de faire la somme des produits; car, d'après les propriétés connues des racines des équations binômes, l'on aura la formule

$$(9)\qquad x_{a+p} = \frac{1}{n}\left(-A_1 + \alpha^{-q}\sqrt[n]{z_1} + \beta\sqrt[n]{z_2} + \ldots + \lambda\sqrt[n]{z_{n-1}}\right),$$

dans laquelle α^{-q}, $\beta, \ldots$, λ désignent les racines imaginaires de cette même équation binôme.

Et il est clair que cette formule (9) donnera toutes les autres racines de (1) en remplaçant successivement les radicaux qu'elle contient par leurs diverses valeurs.

A la vérité, les valeurs du second membre de cette formule sont au nombre de n^{n-1}; mais on peut faire disparaître l'ambiguïté qui en résulte, en observant que les $n-1$ radicaux des seconds membres des équations (8) sont des fonctions rationnelles et semblables de la pro-

posee; et que par suite, l'un d'eux étant donné, on peut exprimér chacun des autres en fonction rationnelle de celui-là. Donc la formule (9) ne contiendra, réduction faite, qu'un seul radical d'indice n, et n'aura dès lors que n valeurs qui seront les n racines cherchées.

Ainsi, ces conditions sont suffisantes; elles sont d'ailleurs nécessaires. Il est donc nécessaire et suffisant, pour résoudre une équation irréductible et de degré premier n, de résoudre deux équations, l'une de degré $n-1$, l'autre de degré $1.2.3\ldots(n-2)$; et ce résultat a été obtenu sans faire aucune hypothèse sur les racines de l'équation proposée.

Corollaire. — Si dans le calcul précédent on fait $n=3$, c'est-à-dire si l'équation à résoudre est du troisième degré, l'équation en y se réduit au premier degré, et celle en Z au deuxième. Donc, la fonction $y=z_1+z_2$ est une fonction rationnelle des coefficients de l'équation proposée, et les valeurs z_1, z_2 et, par suite, les racines x_0, x_1, x_2 de cette équation peuvent être déterminées en fonctions de ses coefficients. Les expressions de ces racines renfermeront deux radicaux cubiques et un radical carré.

On a donc ce théorème : *Toute équation du troisième degré est soluble par radicaux.*

Remarque. — Nous appellerons y la fonction *résolvante* de l'équation proposée (1), et $\varphi(y)=0$ son équation résolvante.

Théorème III. — *Quelle que soit la composition de la fonction résolvante y de l'équation irréductible* $F(x)=0$, *et quel que soit le nombre s de ses valeurs distinctes; si les s groupes de permutations en $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, relatifs à ces s valeurs peuvent être partagés en ν groupes de permutations inséparables; l'équation résolvante $\varphi(y)=0$ se décompose en ν équations, chacune de degré r, $s=\nu r$, à l'aide des racines d'une équation algébrique de degré ν, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de ceux de la proposée.*

Puisque, par hypothèse, la fonction résolvante y a s valeurs, et qu'elle est fonction des racines de la proposée $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, il a été démontré [*] que si l'on permute dans y ces n lettres de toutes les

---

[*] *Journal de Mathématiques* publié par M. Liouville, t. X, 2e série, p. 59.

manières possibles, le nombre total μ des permutations de ces lettres peut être partagé en s groupes composés chacun de q permutations, $\mu = sq$, associés de telle manière que, malgré tous les échanges de ces lettres, les permutations d'un même groupe ne peuvent jamais se séparer. Supposons que ce partage soit effectué, et désignons par (A) le tableau de permutations qui en résulte.

Or, nous supposons en outre que ces s groupes se partagent en ν groupes de permutations *inséparables*, composés chacun de r groupes du tableau (A) : soit (A′) le nouveau tableau de permutations que l'on obtient. Mais, si γ est une fonction symétrique quelconque des r valeurs de y relatives à l'un de ces ν groupes, la somme par exemple; et si l'on désigne par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ les valeurs qu'elle prend pour chacun de ces ν groupes; toute fonction symétrique de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ est invariable par rapport aux n racines de l'équation (1); car les groupes du tableau (A′) étant inséparables pour tous les échanges des n racines, tout changement de ces racines qui ne fera que déplacer les permutations d'un de ces groupes, rendra invariable la valeur de γ relative à ce groupe, et tout changement de ces mêmes racines qui substituera les permutations d'un de ces groupes à celles d'un autre, transformera les valeurs de γ relatives à ces deux groupes l'une dans l'autre, et rendra par conséquent invariable la fonction symétrique des valeurs de γ. Donc toute fonction symétrique de ces ν valeurs est invariable par rapport aux n racines de l'équation (1), et dès lors exprimable en fonction rationnelle des coefficients de cette équation. Il est donc possible d'exprimer en fonction rationnelle de ces coefficients : 1° la somme de ces valeurs $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$; 2° les sommes de leurs produits deux à deux, trois à trois, et ainsi de suite; et par conséquent de former l'équation

$$(10) \qquad \Gamma^\nu + C_1 \Gamma^{\nu-1} + C_2 \Gamma^{\nu-2} + \ldots + C_\nu = 0,$$

dont les racines sont $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$.

Admettons que cette dernière équation soit résolue, et soit γ_1 l'une de ses racines. Cette racine γ_1 étant la somme des r valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_r$ de la fonction résolvante y relatives à l'un des groupes du tableau (A′), du premier par exemple, toute fonction symétrique de ces r valeurs est semblable à γ_1, et par conséquent exprimable en fonc-

tion rationnelle de γ_1 et des coefficients de l'équation (10), qui sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation proposée. Donc, on peut exprimer en fonction rationnelle de γ_1 et des données de la question, 1° la somme des produits deux à deux de ces valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_r$; 2° les sommes de leurs produits trois à trois, et ainsi de suite; d'où la formation de l'équation

$$y^r - \gamma_1 y^{r-1} + P_2 y^{r-2} + \ldots + P_r = 0,$$

dont les racines sont $y_1, y_2, \ldots, y_r$.

De la même manière l'on démontrerait que $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\nu$ étant les autres racines de l'équation (10), on peut, avec les coefficients de l'équation donnée, exprimer en fonction rationnelle, 1° de γ_2, les coefficients de l'équation dont les racines sont les valeurs de y relatives au deuxième groupe du tableau (A'); 2° de γ_3, les coefficients de l'équation dont les racines sont les valeurs de y relatives au troisième groupe du même tableau, et ainsi de suite pour les équations dont les racines correspondent aux autres groupes de (A'), ce qui produit les équations

$$y^r - \gamma_2 y^{r-1} + Q_2 y^{r-2} + \ldots + Q_r = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y^r - \gamma_\nu y^{r-1} + U_2 y^{r-2} + \ldots + U_r = 0.$$

Ainsi, sans qu'on soit obligé de former l'équation résolvante $\varphi(y) = 0$ de degré s, on peut former l'équation (10), et, à l'aide de ses racines, les équations en y dont les racines sont celles de la résolvante; ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — Si l'on forme préalablement l'équation résolvante $\varphi(y) = 0$, il est possible de trouver d'une autre manière les coefficients $P_2, P_3, \ldots, P_r$. Car l'équation $\varphi(y) = 0$ contenant toutes les racines de cette première équation en y du degré r, $\varphi(y)$ est exactement divisible par le polynome $y_1 - \gamma_1 y^{r-1} + P_2 y^{r-2} + \ldots + P_r$. Le reste de cette division, de degré $r - 1$, sera donc nul; et, en égalant à zéro chacun de ses coefficients, on aura r équations entre $\gamma_1, P_2, \ldots, P_r$; $r - 1$ de ces équations détermineront les $r - 1$ inconnues $P_2, \ldots, P_r$ en fonction rationnelle de γ_1, puisque ce sont des fonctions semblables,

et l'équation restante sera satisfaite identiquement quand on y remplacera ces coefficients par leurs valeurs.

Les coefficients des autres équations en y pourront être déterminés de la même manière.

Théorème IV. — *Réciproquement, si l'équation résolvante* $\varphi(y) = 0$ *d'une équation irréductible* $F(x) = 0$ *est décomposable en* ν *facteurs de degrés moindres, à l'aide des* ν *valeurs que prend une fonction* γ *des* n *racines de cette équation en* x *par les permutations de ces racines, les groupes de permutations faites avec les racines de cette même équation en* x *relatifs aux racines de l'équation en* y, *peuvent être partagés en* ν *groupes de permutations inséparables, et ces équations de degrés moindres sont toutes d'un même degré.*

Admettons en effet que l'on ait

$$\varphi(y) = \varphi_1(y, \gamma_1) \cdot \varphi_2(y, \gamma_2) \cdots \varphi_\nu(y, \gamma_\nu), \tag{11}$$

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ désignant les ν valeurs que prend la fonction γ des n racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ de $F(x) = 0$, par suite de toutes les permutations de ces racines. L'équation $\varphi(y) = 0$ étant la résolvante de cette équation en x, ses racines y sont des fonctions rationnelles, théorème II, des racines de $F(x) = 0$; et si son degré est égal à s, les permutations des n racines en x peuvent être partagées, nous l'avons déjà dit, en s groupes de permutations inséparables pour tous les échanges de ces mêmes racines en x, celles d'un même groupe faisant acquérir une même valeur à y. Supposons que ce partage soit effectué, et désignons par (A) le tableau de permutations que l'on obtient.

De même, γ étant une fonction des mêmes racines en x, et ayant ν valeurs par les permutations de ces racines, ces permutations peuvent être partagées en ν groupes de permutations inséparables pour tous les échanges de ces racines, celles d'un même groupe faisant acquérir une même valeur à γ. Supposons également ce partage effectué, et soit (A′) le tableau des permutations qui en résulte.

Cela posé, je remarque que les valeurs de y qui annulent les facteurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ sont respectivement fonctions de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$. De là il suit que si l'on considère d'abord toutes les permutations du groupe

du tableau (A) relatif à l'une quelconque des valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_r$ qui annulent l'un de ces facteurs, φ_1 par exemple, r désignant son degré, tous les échanges des n lettres $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ qui n'altèrent pas cette valeur y_1, c'est-à-dire qui convertissent les unes dans les autres les permutations de ce groupe, ne doivent pas altérer non plus γ_1; car, si par suite de quelques-uns de ces échanges, γ_1 prenait une valeur différente, cette autre valeur ne pourrait être que l'une des autres valeurs de γ, par exemple γ_h; dès lors, ces mêmes échanges transformeraient les racines $y_1, y_2, \ldots, y_r$ du facteur φ_1 en celles du facteur φ_h; ce qui est contre l'hypothèse. Donc, toutes les permutations de ce groupe du tableau (A) doivent se trouver dans celui du tableau (A') relatif à γ_1, ce dernier groupe étant effectivement le seul qui fasse acquérir à γ cette valeur γ_1. Par une même raison, si l'on considère ensuite toutes les permutations des groupes du tableau (A) relatifs à ces r valeurs de y, tous les échanges des n lettres x qui convertissent ces groupes les uns dans les autres n'altéreront pas non plus cette même valeur γ_1. Donc encore, ces r groupes du tableau (A) se trouvent dans celui du tableau (A') qui correspond à γ_1; ce dernier groupe étant effectivement le seul qui fasse acquérir à γ cette valeur γ_1.

Ainsi, le groupe du tableau (A') qui est relatif à γ_1 se compose de toutes les permutations qui correspondent aux r groupes du tableau (A) produisant les racines $y_1, y_2, \ldots, y_r$ de l'équation $\varphi_1 = 0$. La même démonstration s'applique évidemment aux autres groupes de (A') relatifs aux autres valeurs $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\nu$ de la fonction γ; chacun d'eux se compose des permutations des groupes de (A) qui correspondent respectivement aux racines y des équations $\varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0, \ldots, \varphi_\nu = 0$.

De là, il suit d'abord que les s groupes du tableau (A) se décomposent en ν groupes formant le tableau (A'). Et puis, comme les permutations des groupes de ce dernier sont inséparables, le nombre de permutations, et par suite le nombre de groupes de (A) qui forment ceux de (A'), est le même pour tous ces derniers groupes, et par conséquent les facteurs du second membre de l'équation (11) sont tous du même degré r en y.

En sorte que les s groupes du tableau (A) peuvent être partagés en ν groupes de permutations inséparables, et les facteurs du second membre de l'équation (11) sont tous d'un même degré r tel que $s = \nu r$.

Remarque. — On peut évidemment considérer $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ comme les racines d'une équation du degré ν dont les coefficients seraient faciles à former, comme il a déjà été dit, si la fonction γ était connue.

Théorème V. — *Pour que l'équation résolvante $\varphi(y) = 0$ de degré s d'une équation irréductible $F(x) = 0$ soit décomposable en ν équations d'un même degré r tel que $s = \nu r$, à l'aide des racines d'une équation de degré ν; il faut et il suffit que les s groupes de permutations faites avec les racines de $F(x) = 0$ relatifs aux s racines de cette équation en y puissent être partagés en ν groupes de permutations inséparables.*

Ce théorème est en effet une conséquence des deux qui précèdent.

Théorème VI. — *Si deux racines d'une équation algébrique irréductible et de degré composé m sont tellement liées, que l'une d'elles soit égale à une fonction rationnelle de l'autre, toutes les racines de cette équation peuvent être partagées en un ou plusieurs groupes composés d'un même nombre de termes, et tels, que dans chacun d'eux chaque racine soit égale à la même fonction rationnelle de la précédente.*

En effet, si x désigne une des racines de l'équation proposée

$$F(x) = 0,$$

$\theta(x)$ sera une autre racine de cette équation, θ désignant une fonction rationnelle de x et de quantités connues. On aura donc

$$F(\theta x) = 0,$$

et je dis que cette dernière équation est encore satisfaite quand on y remplace x par une racine quelconque de la proposée. Car, si l'on effectue les calculs indiqués par les signes θ et F, on obtiendra

$$F(\theta x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ désignant des fonctions entières par rapport à x que l'on peut toujours supposer premières entre elles. Mais l'équation $F(\theta x) = 0$ entraîne l'équation $\varphi(x) = 0$; et comme l'on a $F(x) = 0$,

les fonctions entières $\varphi(x)$ et $F(x)$ doivent avoir un plus grand commun diviseur algébrique, et puisque $F(x) = 0$ est une équation irréductible, on doit avoir $\varphi(x) = F(x) . \varphi_1(x)$, et par suite

$$F(\theta x) = \frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)} . F(x); \tag{12}$$

et j'ajoute que $\psi(x) = 0$ et $F(x) = 0$ ne sauraient avoir lieu en même temps; car on aurait alors $\psi(x) = F(x) . \psi_1(x)$, et par suite $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ne seraient pas premières entre elles.

Cette équation (12) prouve que toute racine de l'équation proposée $F(x) = 0$, est racine de $F(\theta x) = 0$; mais θx est racine de la proposée, donc $\theta\theta x$, ou simplement $\theta^2 x$, est racine de la même équation : de même $\theta^2(x)$ étant racine de la proposée, $\theta\theta^2(x)$, ou simplement $\theta^3 x$, est encore racine de la même équation, et ainsi de suite à l'infini. Donc chacun des termes de la suite prolongée indéfiniment,

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x, \ldots,\ \theta^{n-1} x,\ \theta^n x \ldots,$$

est racine de la proposée; et comme cette équation est de degré fini m, cette suite ne doit contenir au plus que m termes distincts.

Soit

$$\theta^{n+p} = \theta^p x;$$

l'équation $\theta^n x - x = 0$ a donc pour racine $\theta^p x$ qui est aussi une racine de $F(x) = 0$; d'où il suit que, d'après ce qui précède, toute racine de $F(x) = 0$ est aussi racine de $\theta^n x - x = 0$, et que par conséquent on a $\theta^{n+1} x = \theta x$, $\theta^{n+2} x = \theta^2 x$, et ainsi de suite. Ainsi, les seuls termes distincts de la suite indéfinie qui précède, sont

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x, \ldots,\ \theta^{n-1} x: \tag{13}$$

et si $m = n$, cette suite démontre le théorème.

Supposons actuellement $m > n$, et soit x_1 une des racines de $F(x) = 0$ non comprise dans la suite (13). On démontrera de la même manière que chaque terme de la suite indéfiniment prolongée

$$x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1, \ldots,$$

est racine de l'équation proposée, et que les seuls termes distincts de cette suite sont les n termes

$$x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1, \ldots,\ \theta^{n-1} x_1.$$

Je dis de plus que ces termes sont différents de ceux de la suite (13). Car, si l'on pouvait avoir $\theta^h x_1 = \theta^k x$, l'on aurait

$$\theta^{n-k}\theta^h x_1 = \theta^{n-k}\theta^k x = \theta^n x = x,$$

d'où il suit que, dans cette dernière suite continuée indéfiniment, la racine x s'y trouverait, et que par conséquent elle contiendrait tous les termes de la suite (13), c'est-à-dire, en d'autres termes, que ces deux suites coïncideraient; ce qui est contre l'hypothèse, puisque x_1 diffère de chacun des termes de la suite (13).

Ainsi, ces deux suites contiennent $2n$ racines distinctes de l'équation proposée; donc si $m = 2n$, le théorème est démontré. Mais si $m > 2n$ et si x_2 désigne une racine de $F(x) = 0$ qui ne fasse partie ni de la suite (13) ni de la suivante en x_1, on démontrerait de la même manière qu'avec x_2, on formerait un troisième groupe de n racines différentes

$$x_2,\ \theta x_2,\ \theta^2 x_2, \ldots,\ \theta^{n-1} x_2,$$

et distinctes de celles des deux premiers groupes, et ainsi de suite.

En sorte que les m racines de l'équation proposée peuvent être partagées en groupes composés chacun d'un même nombre de racines,

$$(\text{B}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x,\ \theta x,\ \theta^2 x, \ldots,\ \theta^{n-1} x, \\ x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1, \ldots,\ \theta^{n-1} x_1, \\ x_2,\ \theta x_2,\ \theta^2 x_2, \ldots,\ \theta^{n-1} x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array} \right.$$

et tels que, dans chacun d'eux, chaque racine est égale à la *même* fonction rationnelle de la précédente.

Corollaire. — Si le degré m de l'équation proposée est un nombre premier, les groupes du tableau (B) se réduisent en un seul. Car dans la suite (13) on a $\theta^n x = x$, et si n était inférieur à m, il y aurait au

moins $2n$ racines distinctes dans cette équation; ce qui est impossible, puisque n est premier. Donc $m = n$, et par conséquent tous les groupes (B) se réduisent au premier.

Remarque. — Une équation dont les m racines peuvent être représentées par la suite

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x, \ldots,\ \theta^{m-1} x,$$

θ désignant une fonction rationnelle telle que $\theta^m x = x$, est dite *abélienne*.

De cette définition et du corollaire précédent, résulte donc ce théorème : *Si deux racines d'une équation irréductible et de degré premier sont tellement liées, que l'une d'elles soit égale à une fonction rationnelle de l'autre, cette équation est abélienne.*

THÉORÈME VII. — *Pour qu'une équation algébrique, irréductible et de degré premier n, supérieur à 3, soit résoluble algébriquement, il faut et il suffit : 1° qu'elle soit abélienne; 2° ou qu'entre trois quelconques de ses racines il y ait la relation*

$$(14) \qquad x_{a+p\rho} = \theta(x_{a+p}, x_a),$$

dans laquelle les indices de x sont pris suivant le module n; θ désignant une fonction rationnelle, ρ une des racines primitives du degré n, a un des nombres 0, 1, 2,..., $n-1$, *et p un des nombres* 1, 2, 3,..., $n-1$.

Soient

$$(1) \qquad F(x) = 0$$

l'équation que l'on considère et n son degré. Cette équation étant par hypothèse irréductible et de degré premier, sa résolution dépend nécessairement, théorème II, de celle de deux autres, l'une (6) de degré $n-1$, l'autre (7) de degré $1.2.3\ldots(n-2)$. Donc pour résoudre l'équation proposée (1), il faut résoudre ces deux équations, et d'abord la dernière dont une des racines sert effectivement à former les coefficients de la première. Mais cette dernière (7) a pour racines les $1.2.3\ldots(n-2)$ valeurs de la fonction y définie par la formule (5), valeurs qui correspondent aux groupes de notre troisième classification

déjà citée des permutations de n lettres : et n étant supérieur à 3, les groupes de cette classification ne peuvent être partagés [*] en nouveaux groupes de permutations inséparables; donc, théorème V, cette équation résolvante (7), $\varphi(y) = 0$, est indécomposable en équations de degrés moindres. Donc pour que l'équation proposée soit résoluble algébriquement, il faut que toutes les racines de cette équation résolvante soient égales entre elles; puisque toute autre hypothèse la rendrait décomposable en équations de degrés moindres.

Or, tous les coefficients de cette résolvante, $\varphi(y) = 0$, sont des fonctions symétriques des racines de l'équation proposée (1); donc la somme $y_1 + y_2 + \ldots$ des racines de cette première équation est une fonction invariable des racines de la seconde; et, puisque toutes les racines $y_1, y_2, \ldots$ sont égales, la valeur de y donnée par la formule (5), *telle qu'elle est faite*, doit être une fonction invariable des racines de l'équation (1). Mais cette fonction est rationnelle par rapport aux n racines de (1) et invariable pour les $n(n-1)$ permutations faites avec ces racines, relatives à un même ordre vu successivement de chacune d'elles; et $n(n-1)$ est égal au nombre de combinaisons deux à deux que l'on peut faire avec n lettres. Donc cette fonction résolvante y doit se réduire, d'une manière rationnelle, à ne contenir que deux des n racines de l'équation proposée (1), à moins qu'elle ne se réduise à ne contenir qu'une seule de ces mêmes racines. De là deux cas *seulement* à distinguer.

1° Si la fonction y se réduit à une fonction rationnelle d'une seule des racines de l'équation proposée, la forme de cette fonction exige que, une des racines de la proposée étant donnée, chacune des $n-1$ autres soit égale à une fonction rationnelle de celle-là; donc, corollaire du théorème VI, l'équation proposée est *abélienne*. Ainsi, dans ce premier cas, pour que l'équation (1) soit résoluble algébriquement, il faut que la première des conditions du théorème énoncé soit satisfaite.

2° Si la fonction y se réduit à une fonction rationnelle de deux des racines de l'équation proposée, cette réduction exige que, deux racines

[*] *Voir* la Note placée à la fin de ce Mémoire.

quelconques de cette équation étant données, par exemple x_a et x_{a+p}, on puisse exprimer par des fonctions rationnelles chacune des $n-2$ autres. Donc la fonction z_1, qui contient ces n racines, se réduira à une fonction rationnelle de x_a et x_{a+p}, par exemple à

$$(15) \qquad z_1 = \psi(x_{a+p}, x_a),$$

ψ désignant une fonction rationnelle : il en sera de même des fonctions $z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}$. Mais ces dernières fonctions se déduisent de z_1 en changeant p successivement en $p\rho, p\rho^2, \ldots, p\rho^{n-2}$, on doit donc avoir les relations

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} z_2 &= \psi(x_{a+p\rho}, x_a), \\ z_3 &= \psi(x_{a+p\rho^2}, x_a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_{n-1} &= \psi(x_{a+p\rho^{n-2}}, x_a); \end{aligned} \right.$$

et comme z_1 peut être écrite ainsi

$$z_1 = (x_a + \alpha^q x_{a+p} + \alpha^{2q} x_{a+p\rho} + \ldots + \alpha^{(n-1)q} x_{a+p\rho^{n-2}})^n,$$

ces relations exigent l'existence de la relation (14). Ainsi dans ce second cas, pour que l'équation proposée soit résoluble, il faut que la seconde condition du théorème énoncé soit satisfaite.

Donc l'une ou l'autre des conditions énoncées sont nécessaires.

Pour démontrer qu'elles sont suffisantes, nous devons évidemment aussi distinguer deux cas.

1° Si l'équation proposée est abélienne, c'est-à-dire si ses racines sont représentées par la suite

$$(17) \qquad x_a, \ \theta x_a, \ \theta^2 x_a, \ldots, \ \theta^{n-1} x_a,$$

telle que $\theta^n x_a = x_a$; chacune des racines de l'équation (6), d'où dépend nécessairement la résolution de l'équation proposée, peut être trouvée immédiatement, d'où l'on déduira la valeur de la somme de ces racines qui est précisément la racine unique de l'équation résolvante (7); car l'une de ces $n-1$ racines, z_1 par exemple, est invariable

pour les n permutations circulaires relatives aux n racines de la proposée; et d'après l'hypothèse faite sur ces dernières, en changeant dans z_1, par exemple x_a en θx_a, θx_a se change en $\theta^2 x_a$, $\theta^2 x_a$ en $\theta^3 x_a$, et ainsi de suite. En sorte que ce seul changement de x_a en θx_a suffit pour amener une permutation circulaire. Donc ce changement rend z_1 invariable; et comme il peut s'appliquer à toute autre racine que x_a, il s'ensuit que le changement d'une des racines de la proposée en toute autre entraîne celui de toutes les autres, amène une permutation circulaire de la première considérée, et par suite rend z_1 invariable. Donc la fonction z_1 est invariable pour tous les changements possibles des n racines de l'équation proposée. Elle peut donc être exprimée en fonction rationnelle des coefficients de cette équation. Et pour avoir la valeur v_1 de z_1, il suffit d'exprimer, à l'aide de la fonction rationnelle θ, z_1 en fonction de l'une des racines, x_a par exemple,

$$z_1 = \psi(x_a);$$

et de remarquer que le raisonnement qui précède produisant la suite d'égalités

$$\psi(x_a) = \psi(\theta x_a) = \psi(\theta^2 x_a) = \ldots = \psi(\theta^{n-1} x_a),$$

l'on aura l'équation

$$n\psi(x_a) = \psi(x_a) + \psi(\theta x_a) + \psi(\theta^2 x_a) + \ldots + \psi(\theta^{n-1} x_a),$$

dont le second membre est une fonction symétrique des racines de l'équation proposée.

Or, si l'on considère toute autre racine de l'équation (6), z_2 par exemple, qui se déduit de z_1

$$z_1 = (x_a + \alpha\theta x_a + \alpha^2\theta^2 x_a + \ldots + \alpha^{n-1}\theta^{n-1} x_a)^n,$$

en prenant les racines x de deux en deux à partir de la première, on aura

$$z_2 = (x_a + \alpha\theta^2 x_a + \alpha^2\theta^4 x_a + \alpha^3\theta^6 x_a + \ldots)^n,$$

expression qui revient à celle de la première en y remplaçant α par α^2 qui est une racine de $x^n - 1 = 0$ différente de α. Il en est de même

de z_3, z_4,..., z_{n-1}; donc les racines z_2, z_3,..., z_{n-1} de l'équation (6) ne sont autre chose que les valeurs de z_1 quand on y remplace α successivement par l'une des $n-2$ autres racines imaginaires de $x^n-1=0$. On obtiendra donc, comme pour z_1, chacune de ces racines en fonction rationnelle des coefficients de l'équation proposée : soient $v_2, v_3,\ldots, v_{n-1}$ leurs valeurs respectives.

En extrayant la racine $n^{ième}$ de chacune de ces $n-1$ racines v_1, $v_2,\ldots, v_{n-1}$, et en réunissant aux $n-1$ équations qu'on en déduit celle qui donne la somme des racines de l'équation proposée (1), on aura les n équations suivantes, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{n-1}$ les $n-1$ racines imaginaires de $x^n-1=0$,

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} x_a+\theta x_a+\theta^2 x_a+\ldots+\theta^{n-1}x_a=-A_1,\\ x_a+\alpha_1\theta x_a+\alpha_1^2\theta^2 x_a+\ldots+\alpha_1^{n-1}\theta^{n-1}x_a=\sqrt[n]{v_1},\\ x_a+\alpha_2\theta x_a+\alpha_2^2\theta^2 x_a+\ldots+\alpha_2^{n-1}\theta^{n-1}x_a=\sqrt[n]{v_2},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_a+\alpha_{n-1}\theta x_a+\alpha_{n-1}^2\theta^2 x_a+\ldots+\alpha_{n-1}^{n-1}\theta^{n-1}x_a=\sqrt[n]{v_{n-1}}; \end{array}\right.$$

équations qui, étant linéaires par rapport aux n racines à trouver, suffiront pour déterminer facilement ces racines. Pour avoir l'une d'elles, $\theta^i x_a$ par exemple, il suffit de multiplier respectivement les deux membres de chacune de ces équations par 1, α_1^{-i}, α_2^{-i},..., α_{n-1}^{-i}, et d'ajouter les produits; car cette somme donne, en ayant égard aux propriétés des racines des équations binômes, la formule

$$\theta^i x_a=\frac{1}{n}\left(-A_1+\alpha_1^{-i}\sqrt[n]{v_1}+\alpha_2^{-i}\sqrt[n]{v_2}+\ldots+\alpha_{n-1}^{-i}\sqrt[n]{v_{n-1}}\right),$$

de laquelle on déduira évidemment les n racines de la proposée en remplaçant successivement i par $0, 1, 2,\ldots, n-1$.

A la vérité, un radical d'indice n ayant n valeurs, on pourrait croire que l'expression précédente donnât n^{n-1} valeurs distinctes. Il n'en est rien, car les fonctions des racines équivalentes respectivement à $\sqrt[n]{v_1}$, $\sqrt[n]{v_2},\ldots, \sqrt[n]{v_{n-1}}$ étant des fonctions semblables, l'une d'elles étant donnée, chacune des autres peut être exprimée par une fonction ra-

tionnelle de celle-là, comme le prouve la théorie bien connue des fonctions semblables; le calcul pouvant être abrégé par des considérations dues à Abel et qu'il est inutile de rapporter ici. Cette réduction faite, l'expression précédente n'aura alors que n valeurs distinctes qui sont les n racines de la proposée.

Ainsi la condition relative au premier cas, qui déjà est nécessaire, est de plus suffisante.

Remarque. — Il est utile de remarquer que, quoique le degré n de l'équation proposée (1) ne fût pas un nombre premier, si cependant ses racines étaient représentées par la suite (17); cette équation, appelée encore abélienne, serait résoluble algébriquement, puisque rien ne suppose, dans la résolution qui précède, que n soit un nombre premier.

2° Si la condition relative au second cas est satisfaite, c'est-à-dire si la relation (14) est vraie, je dis que cette condition, qui est nécessaire, est de plus suffisante.

Cette relation montre en effet comment, deux racines quelconques x_a et x_{a+p} étant données, on peut exprimer de proche en proche les $n-2$ autres; et comment elles naissent les unes des autres. Car cette relation étant vraie, par hypothèse, quand on y remplace p successivement par $p\rho, p\rho^2, \ldots, p\rho^{n-2}$, l'on a

$$\begin{gathered} x_{a+p\rho^2} = \theta(x_{a+p\rho}, x_a), \\ x_{a+p\rho^3} = \theta(x_{a+p\rho^2}, x_a), \\ \dots\dots\dots\dots, \\ x_{a+p\rho^{n-2}} = \theta(x_{a+p\rho^{n-3}}, x_a). \end{gathered}$$

Donc, toute fonction rationnelle connue des n racines de l'équation proposée peut se réduire, à l'aide de la fonction θ, à une fonction rationnelle de deux quelconques de ses racines, x_a et x_{a+p}.

Cela posé : je dis que l'équation (6), d'où dépend nécessairement la résolution de l'équation proposée, est abélienne et que, par suite, elle est résoluble algébriquement. Car ses racines sont, dans le cas présent, les valeurs de $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ données par les formules (15) et (16).

Or, si l'on considère, avec M. Hermite, la fonction

$$u = [\psi(x_{a+p}, x_a) + \lambda\psi(x_{a+p\rho}, x_a) + \ldots + \lambda^{n-2}\psi(x_{a+p\rho^{n-2}}, x_a)]^{n-1},$$

dans laquelle λ désigne une des racines imaginaires de l'équation binôme $x^{n-1} - 1 = 0$; et si l'on y change successivement p en $p\rho$, $p\rho^2, \ldots$, $p\rho^{n-2}$, ou, ce qui est la même chose, si l'on donne à p les valeurs 1, 2,..., $n-1$, les divers termes du polynôme soumis à l'exposant $n-1$ ne font que se déplacer circulairement. Donc cette fonction u est invariable pour toutes ces $n-1$ valeurs de p. D'ailleurs chacun des termes de ce même polynôme, et par suite u, est encore invariable pour les n permutations circulaires que produit la permutation relative à ce terme; et, d'après la signification de chacun d'eux, l'on obtient évidemment ces n permutations en donnant à a successivement les n valeurs 0, 1, 2,..., $n-1$. De là il suit que si l'on réduit la fonction u à ne contenir que les deux racines x_a, x_{a+p},

$$u = \chi(x_{a+p}, x_a),$$

cette fonction rationnelle χ conservera la même valeur, quels que soient les indices de a et de p, et que par suite l'on aura

$$n(n-1)u = \sum_0^{n-1} \sum_1^{n-1} \chi(x_{a+p}, x_a),$$

relation dont le second membre est une fonction symétrique des racines de l'équation proposée $F(x) = 0$. On peut donc exprimer u en fonction rationnelle des coefficients de cette équation. Il en serait de même, si dans u on remplaçait λ par toute autre racine imaginaire de la même équation $x^{n-1} - 1 = 0$, $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-2}$. Mais on démontrerait de la même manière que la somme

$$\psi(x_{a+p}, x_a) + \psi(x_{a+p\rho}, x_a) + \ldots + \psi(x_{a+p\rho^{n-2}}, x_a),$$

c'est-à-dire la racine unique y de l'équation résolvante (7), réduite à ne contenir que les deux mêmes racines x_a et x_{a+p}, est symétrique des racines de l'équation proposée; et dès lors qu'elle est exprimable en fonction rationnelle de ses coefficients. Donc, on aura les $n-1$ équa-

tions dont les seconds membres sont connus,

$$\psi(x_{a+p}, x_a) + \psi(x_{a+p\rho}, x_a) + \ldots + \psi(x_{a+p\rho^{n-2}}, x_a) = -\mathrm{D},$$
$$\psi(x_{a+p}, x_a) + \lambda_1\psi(x_{a+p\rho}, x_a) + \ldots + \lambda_1^{n-2}\psi(x_{a+p\rho^{n-2}}, x_a) = \sqrt[n-1]{u_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\psi(x_{a+p}, x_a) + \lambda_{n-2}\psi(x_{a+p\rho}, x_a) + \ldots + \lambda_{n-2}^{n-2}\psi(x_{a+p\rho^{n-2}}, x_a) = \sqrt[n-1]{u_{n-2}}.$$

Ces $n-1$ équations, en tout semblables aux équations (18), prouvent effectivement que l'équation (6) est abélienne. De ces $n-1$ équations, on déduira donc les $n-1$ termes, $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ qui entrent dans u.

Or, ces $n-1$ termes étant connus, on aura, en ayant égard à leurs expressions (4) en fonction des racines de la proposée, $n-1$ équations, qui, réunies à l'équation connue

$$x_a + x_{a+p} + x_{a+2p} + \ldots + x_{a+(n-1)p} = -\mathrm{A}_1,$$

feront connaître les n racines cherchées, puisque ces n équations simultanées ne sont autres que les équations (8). Ainsi cette relation (14), qui déjà est nécessaire, est de plus suffisante.

Il résulte donc de tout ce qui précède que, *les seules équations algébriques, irréductibles et de degré premier supérieur à* 3 *qui soient résolubles algébriquement, sont celles qui sont abéliennes ou celles dont les racines satisfont à l'équation* (14).

Corollaire I. — Si l'on divise le premier membre $\mathrm{F}(x)$ de toute équation irréductible, de degré premier, non abélienne et résoluble algébriquement, par un de ses facteurs linéaires, le quotient égalé à zéro est une équation abélienne.

Car, l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$ étant résoluble algébriquement, de degré premier, irréductible et non abélienne, la relation (14) est satisfaite; le quotient de $\mathrm{F}(x)$ par $x - x_a$ égalé à zéro, a pour racines x_{a+p}, $x_{a+p\rho}, \ldots, x_{a+p\rho^{n-2}}$: et l'on déduit de cette relation les équations

$$x_{a+p\rho} = \theta(x_{a+p}, x_a) = \theta x_{a+p},$$
$$x_{a+p\rho^2} = \theta x_{a+p\rho} = \theta^2 x_{a+p},$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_{a+p\rho^{n-2}} = \theta x_{a+p\rho^{n-3}} = \theta^{n-2} x_{a+p},$$
$$x_{a+p\rho^{n-1}} = x_{a+p} = \theta x_{a+p\rho^{n-2}} = \theta^{n-1} x_{a+p}.$$

qui prouvent qu'effectivement ce quotient égalé à zéro est une équation abélienne.

Ce théorème, qui se présente ici comme corollaire, est dû à M. Hermite.

Corollaire II. — De l'une quelconque des relations précédentes, par exemple de

$$x_{a+p\rho^2} = \theta(x_{a+p\rho}, x_a),$$

on peut déduire l'une quelconque des trois racines qui y entrent en fonction rationnelle des deux autres; puisque l'équation (14) exige que, deux quelconques des racines de $F(x) = 0$ étant données, on puisse déterminer les $n - 2$ autres en fonction rationnelle de ces deux là.

Corollaire III. — Si les coefficients d'une équation algébrique n'ont entre eux aucune relation, sont indéterminés, cette équation est nécessairement irréductible. Le théorème qui vient d'être démontré produit donc cet autre théorème : *Il est impossible de résoudre algébriquement les équations générales de degré premier supérieur au troisième.*

NOTE.

Les permutations, en effet, d'un quelconque des groupes de cette troisième classification sont relatives à un seul et même ordre ou à un seul et même polygone vu successivement de chacun de ses sommets, en sorte que tous ses groupes ne sont autre chose que *tous* les polygones distincts que l'on peut former avec m lettres. Ces polygones se déduisent les uns des autres par un changement de deux lettres quelconques; leur déduction est donc arbitraire.

Donc, si on les assemble de deux en deux ou de trois en trois,..., pour former de nouveaux groupes composés de permutations *inséparables;* il n'y a pas de raison pour que, dans ces nouveaux groupes, l'on y mette plutôt tels de ces polygones que tels autres. Il faut donc, ou les laisser séparés comme dans cette troisième classification, ou les

réunir tous en un seul groupe, auquel cas il n'y a pas à proprement parler de classification, puisque ce groupe unique contient la totalité des permutations de ces m lettres.

Donc les groupes de cette troisième classification ne peuvent pas être partagés en nouveaux groupes de permutations inséparables pour tous les échanges des lettres qui les forment.

Remarque. — Si le nombre de lettres est égal à 3, le nombre de groupes de cette classification est égal à l'unité : pour tout autre nombre de lettres, le nombre de groupes est supérieur à l'unité, et même à ce nombre de lettres.

SUR LES DEUX FORMES

$x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 15t^2$, $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

On obtient un résultat assez remarquable en considérant à la fois les nombres

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 15t^2)$$

et

$$N(n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2)$$

des représentations d'un même entier n par les deux formes indiquées en tête de cet article. Quoiqu'il soit sans doute très-difficile d'obtenir une expression simple de chacun de ces nombres pris isolément, on trouve néanmoins la valeur de la somme suivante :

$$\begin{aligned}&4N(n = x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 15t^2)\\ &+ 6N(n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2).\end{aligned}$$

Je puis démontrer en effet que cette valeur est égale à celle de cette autre somme

$$N(3n = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2) + 9N[n = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2)],$$

dont les deux termes s'exprimeront simplement, d'après ce que j'ai donné dans le cahier de janvier 1864 au sujet de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2.$$

On remarquera que

$$N[n = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2)] = 0$$

quand n n'est pas divisible par 3, tandis que pour n multiple de 3, ou pour $n = 3q$, l'on a

$$N[n = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2)] = N(q = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2).$$

Je laisse au lecteur à trouver la formule explicite qui résulte naturellement des observations précédentes.

THÉORÈMES

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS

CONTENUS DANS LA FORMULE $4A^2+5B^2$, EN Y PRENANT A IMPAIR;

PAR M. J. LIOUVILLE.

---

1. Les nombres premiers contenus dans la formule quadratique

$$4A^2 + 5B^2,$$

en y prenant A impair, sont de deux espèces; les uns appartiennent à la forme linéaire

$$40\mu + 1,$$

les autres à la forme linéaire

$$40\mu + 9.$$

Nous donnerons pour chacune de ces deux espèces de nombres premiers un théorème distinct.

2. Considérons d'abord les nombres premiers m qui sont à la fois de la forme linéaire

$$40\mu + 1$$

et de la forme quadratique

$$4A^2 + 5B^2$$

où la valeur de A sera naturellement impaire. Je dis que pour chacun d'eux on pourra poser au moins une fois (et toujours un nombre

impair de fois) l'équation

$$m = 2(10x+3)^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x étant un entier pair ou impair, positif, nul ou négatif, y un entier impair et positif, enfin p un nombre premier qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

Les nombres contenus dans la formule

$$2(10x+3)^2,$$

en y prenant pour x un entier quelconque (positif, nul ou négatif) sont, par ordre de grandeur,

$$2.3^2,\quad 2.7^2,\quad 2.13^2,\quad 2.17^2,\quad 2.23^2,\ \text{etc.},$$

c'est-à-dire

$$18,\quad 98,\quad 338,\quad 578,\quad 1058,\ \text{etc.}$$

Notre théorème revient donc à dire que si d'un nombre premier m appartenant en même temps à la forme linéaire

$$40\mu + 1$$

et à la forme quadratique

$$4A^2 + 5B^2$$

on retranche tant que faire se peut les termes de la suite

$$18,\ 98,\ 338,\ 578,\ 1058,\ \text{etc.},$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier non diviseur de y.

Nous n'exigeons rien *à priori* au sujet du nombre premier p; mais il est aisé de voir que, d'après les conditions où nous nous plaçons, on ne peut pas manquer d'avoir $p \equiv 7 \pmod{8}$ et p non-résidu quadratique de 5. Donc p sera toujours de l'une ou de l'autre des deux

formes linéaires

$$40\nu + 7, \quad 40\nu + 23.$$

3. Prenons, par exemple, les nombres premiers

$$41, \ 241, \ 281, \ 601, \ 641, \ 881,$$

qui sont tous de la forme

$$40\mu + 1.$$

Comme ils remplissent aussi la seconde condition imposée par notre théorème, attendu que l'on a

$$\begin{aligned} 41 &= 4.3^2 + 5.1^2, \\ 241 &= 4.7^2 + 5.3^2, \\ 281 &= 4.3^2 + 5.7^2, \\ 601 &= 4.7^2 + 5.9^2, \\ 641 &= 4.3^2 + 5.11^2, \\ 881 &= 4.3^2 + 5.13^2, \end{aligned}$$

nous devrons trouver pour chacun d'eux un nombre impair de restes canoniques.

Or, pour 41, il n'y a qu'un reste, et ce reste est canonique comme le prouve l'identité

$$41 - 18 = 23.1^2.$$

Pour chacun des deux nombres premiers

$$241, \ 281,$$

il y a un reste canonique et un reste non canonique. On a, en effet, d'une part

$$241 - 18 = 223.1^2$$

et

$$241 - 98 = 143 = 11.13;$$

d'autre part,

$$281 - 18 = 263.1^2$$

et

$$281 - 98 = 183 = 3.61.$$

Pour 601, il y a quatre restes, dont trois canoniques et un non canonique. Celui-ci s'offre immédiatement, car

$$601 - 18 = 583 = 11.53.$$

Les restes suivants sont canoniques; c'est d'abord

$$601 - 98 = 503.1^2,$$

puis

$$601 - 338 = 263.1^2,$$

enfin

$$601 - 578 = 23.1^2.$$

Pour chacun des deux nombres premiers

$$641,\ 881,$$

il y a aussi quatre restes; mais un seul d'entre eux est canonique. Relativement à 641, on a d'abord trois restes non canoniques, savoir :

$$641 - 18 = 623 = 7.89,$$
$$641 - 98 = 543 = 3.181,$$
$$641 - 338 = 303 = 3.101;$$

mais le quatrième reste est canonique, car

$$641 - 578 = 7.3^2.$$

Relativement à 881, c'est au contraire le premier reste qui est canonique, puisque

$$881 - 18 = 863.1^2;$$

les trois autres restes sont non canoniques : on a d'abord

$$881 - 98 = 783 = 3^3.29,$$

ensuite

$$881 - 338 = 543 = 3.181,$$

enfin

$$881 - 578 = 303 = 3.101.$$

On voit que notre théorème est vérifié partout.

4. Considérons maintenant les nombres premiers m qui sont à la fois de la forme linéaire

$$40\mu + 9$$

et de la forme quadratique

$$4A^2 + 5B^2$$

où la valeur de A sera naturellement impaire. Je dis que pour chacun d'eux on pourra toujours poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 2(10x + 1)^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x étant un entier pair ou impair, positif, nul ou négatif, y un entier impair et positif, enfin p un nombre premier qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

Les nombres contenus dans la formule

$$2(10x + 1)^2,$$

en y prenant pour x un entier quelconque (positif, nul ou négatif), sont par ordre de grandeur

$$2.1^2,\ 2.9^2,\ 2.11^2,\ 2.19^2,\ 2.21^2,\ \text{etc.},$$

c'est-à-dire

$$2,\quad 162,\quad 242,\quad 722,\quad 882,\quad \text{etc.}$$

Notre théorème revient donc à dire que si d'un nombre premier m,

appartenant à la fois à la forme linéaire

$$40\mu + 9$$

et à la forme quadratique

$$4A^2 + 5B^2,$$

on retranche tant que faire se peut les termes de la suite

$$2,\ 162,\ 242,\ 722,\ 882,\ \text{etc.},$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y.

Nous n'exigeons rien *à priori* au sujet du nombre premier p; mais cette fois encore il est visible que, dans les conditions où nous nous plaçons, p ne peut manquer d'être de l'une des deux formes linéaires

$$40\nu + 7, \quad 40\nu + 23.$$

5. Commençons par les deux exemples de

$$m = 409$$

et de

$$m = 449.$$

Les deux nombres premiers 409 et 449 étant en effet de la forme linéaire

$$40\mu + 9,$$

et aussi de la forme quadratique

$$4A^2 + 5B^2$$

puisque l'on a

$$409 = 4.1^2 + 5.9^2$$

et

$$449 = 4.9^2 + 5.5^2,$$

notre théorème doit avoir lieu pour eux.

Or je trouve respectivement pour 409 et pour 449 les restes canoniques

$$409 - 242 = 167.1^2$$

et

$$449 - 242 = 23.3^2.$$

Les autres restes sont non canoniques; car on a d'une part

$$409 - 2 = 407 = 11.37$$

et

$$409 - 162 = 247 = 13.19,$$

puis, d'autre part,

$$449 - 2 = 447 = 3.149$$

et

$$449 - 162 = 287 = 7.41.$$

Notre théorème a donc réellement lieu pour les nombres premiers cités.

Nous pouvons faire ensuite

$$m = 569,$$

attendu qu'en vertu des deux identités

$$569 = 40.14 + 9$$

et

$$569 = 4.9^2 + 5.7^2$$

le nombre premier 569 remplit les conditions voulues.

Cette fois encore il faudra retrancher de 569 les trois nombres

$$2,\ 162,\ 242.$$

Or le premier reste ainsi obtenu est canonique; car

$$569 - 2 = 567 = 7.9^2.$$

Mais les deux autres restes sont non canoniques. On a en effet

$$569 - 162 = 407 = 11.37,$$

où 11 et 37 sont des nombres premiers, puis

$$569 - 242 = 327 = 3.109,$$

où 3 et 109 sont de même premiers. Notre théorème a donc lieu comme plus haut.

Nous ne pensons pas qu'il soit utile de pousser plus loin ces vérifications numériques.

MÉMOIRE

SUR

LA DISPERSION DE LA LUMIÈRE;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

INTRODUCTION.

Dans ce Mémoire, nous nous proposons d'étudier le mode de propagation du mouvement dans l'éther qui est renfermé dans les corps transparents, et de donner la théorie de la double réfraction de la lumière, en tenant compte de la dispersion.

Nous allons expliquer en quoi consiste ce travail.

Poisson ayant considéré un corps solide homogène comme formé d'un système de molécules, qui s'attirent ou se repoussent mutuellement suivant une fonction de la distance, trouva pour la représentation du mouvement vibratoire de ce corps, rapporté à trois axes rectangulaires, trois équations que l'on peut écrire sous la forme :

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2H}{du^2}\xi + \frac{d^2H}{du\,dv}\eta + \frac{d^2H}{du\,dw}\zeta &= \frac{d^2\xi}{dt^2},\\ \frac{d^2H}{du\,dv}\xi + \frac{d^2H}{dv^2}\eta + \frac{d^2H}{dv\,dw}\zeta &= \frac{d^2\eta}{dt^2},\\ \frac{d^2H}{du\,dw}\xi + \frac{d^2H}{dv\,dw}\eta + \frac{d^2H}{dw^2}\zeta &= \frac{d^2\zeta}{dt^2},\end{aligned}\right.$$

ξ, η, ζ étant les projections de la vibration, t le temps, et H la fonction la plus générale du quatrième degré de u, v, w; après quoi, il faut imaginer que u, v, w y désignent les signes de différentiation $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$ qui se rapportent à ξ, η, ζ.

Les équations (a) ne renferment que les dérivées du second ordre

des composantes ξ, η, ζ de la vibration; il en résulte que la vitesse de propagation du mouvement ne dépend pas de la durée de la vibration, et effectivement pour l'explication des faits de l'acoustique, il n'y a pas lieu de se préoccuper de la différence de vitesse qui en provient. Cependant, si l'on tient compte des dérivées d'ordres supérieurs, et que l'on considère H comme pouvant renfermer non-seulement des termes du quatrième ordre, mais encore des termes d'ordres supérieurs, les équations (a) peuvent seulement représenter en toute rigueur le mouvement d'un système de molécules, qui s'attirent ou se repoussent suivant une fonction de leur distance. Cauchy les a écrites sous cette forme, et supposant que l'éther peut être assimilé au système de molécules précité, il put avoir égard à la différence de vitesse des ondes lumineuses résultant de la différence de la durée de la vibration, et exposer dans ses *Mémoires de Prague* une explication de la dispersion de la lumière.

Toutefois, comme en se bornant aux dérivées du second ordre, les équations (a) ne sauraient donner en général même approximativement les lois du mouvement de l'éther, à plus forte raison Cauchy ne put calculer dans tous les cas la dispersion de la lumière, mais il lui fut permis de les appliquer au cas particulier d'un corps isotrope, c'est-à-dire dont l'élasticité est la même dans toutes les directions autour d'un même point.

A la vérité, dans ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* et dans ses *Exercices de Prague*, Cauchy a ajouté aux premiers membres des équations (a), respectivement les expressions

$$(d) \qquad G\xi, \quad G\eta, \quad G\zeta,$$

G étant un polynôme en u, v, w; et on a essayé avec ces nouveaux termes d'appliquer les équations (a) à la représentation des phénomènes de la lumière; mais il est aisé de voir que si l'on obtient des conclusions qui ne sont pas en contradiction évidente avec les résultats de l'expérience, cela tient uniquement à ce qu'on se donne *à priori* la surface de l'onde, et qu'on suppose qu'elle s'écarte très-peu d'une sphère.

D'ailleurs, tous les géomètres qui ont considéré un corps solide

comme composé d'un système de molécules, qui s'attirent ou se repoussent mutuellement suivant une fonction de la distance, tels que Poisson, M. de Saint-Venant, etc., et Cauchy lui-même dans ses *Exercices de Mathématiques*, 1829, ont adopté les équations (a) sans l'addition des termes (d), et il n'y a pas plus de raison pour les introduire, quand on traite de la théorie de la lumière.

Reportons nous maintenant à un travail de M. Lamé. Après avoir établi les équations du mouvement vibratoire d'un corps solide, sans faire aucune hypothèse sur l'action de deux molécules, M. Lamé dans sa *Théorie de l'élasticité des corps solides*, les applique au mouvement de l'éther, en admettant comme Fresnel que l'éther ne change pas de densité, et il obtient ainsi par des considérations de pure analyse, jointes au principe d'Huyghens sur la réfraction des ondes, les lois de la double réfraction de la lumière. Les résultats sont en parfait accord avec ceux qui ont été obtenus d'une manière moins analytique par M. Neumann en modifiant la théorie de Fresnel; il trouve donc que l'onde qui se propage est l'onde de Fresnel, et que la vibration est parallèle au plan de polarisation [*].

Ce travail de M. Lamé est la base de notre Mémoire.

Si l'on suppose qu'un corps solide soit ébranlé dans toute la partie renfermée entre deux plans parallèles excessivement rapprochés, cet ébranlement se propagera dans les deux sens en trois ondes planes parallèles, qui ont des vitesses différentes, et sur chacune de ces ondes planes la direction de la vibration est constamment la même, mais elle varie d'une onde à l'autre. Ayant imaginé que ces trois directions

---

[*] En général, quand on expose un cours sur la théorie de la lumière, c'est au moment où l'on recherche l'intensité des rayons réfléchis et réfractés à la surface de séparation de deux corps isotropes, qu'on fait un choix entre la théorie de Fresnel, qui suppose la densité de l'éther variable d'un corps à l'autre, mais l'élasticité la même, et par suite la vibration perpendiculaire au plan de polarisation, et la théorie de Neumann et Mac-Cullagh* qui suppose la densité constante et l'élasticité variable, et par suite la vibration parallèle au plan de polarisation. Là, on peut donner une préférence à l'hypothèse de Neumann et Mac-Cullagh; mais ce n'est que dans l'étude de la double réfraction que tout doute doit disparaître.

* *Voir* leurs Mémoires dans ce Journal (1re série, t. VII).

soient rectangulaires, nous avons reconnu que les équations de l'élasticité pouvaient se mettre sous la forme

$$(b)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Theta}{d(u^2)}\xi + \dfrac{d\Theta}{d(2uv)}\eta + \dfrac{d\Theta}{d(2uw)}\zeta = \dfrac{d^2\xi}{dt^2}, \\ \dfrac{d\Theta}{d(2uv)}\xi + \dfrac{d\Theta}{d(v^2)}\eta + \dfrac{d\Theta}{d(2vw)}\zeta = \dfrac{d^2\eta}{dt^2}, \\ \dfrac{d\Theta}{d(2uw)}\xi + \dfrac{d\Theta}{d(2vw)}\eta + \dfrac{d\Theta}{d(w^2)}\zeta = \dfrac{d^2\zeta}{dt^2}, \end{cases}$$

que nous allons expliquer. Θ représente la fonction la plus générale du second degré des six symboles u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2wu$, $2uv$, qui peut par conséquent s'écrire

$$\Theta = a(u^2)^2 + b(v^2)^2 + c(w^2)^2 + d\,2uv.u^2 \\ + e\,2uw.v^2 + fu^2.w^2 + g(2uw)^2 + \ldots,$$

et pour avoir les termes des équations (b), il faut prendre les dérivées de Θ par rapport aux six symboles u^2, v^2,..., $2uv$; ce qui donne, par exemple

$$\frac{d\Theta}{d(u^2)} = 2au^2 + d\,2uv + fw^2 + \ldots;$$

enfin, dès que ces dérivées sont obtenues, comme dans les équations (a), c'est u, v, w qu'il faut regarder comme des symboles, qui indiquent les signes de différentiation $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$ portant sur ξ, η, ζ.

Les équations (b), mais sans cette forme symbolique, ont été considérées par M. Kirchoff (*Journal de M. Borchardt*, t. LVI) comme représentant les équations les plus générales de l'élasticité d'un corps solide. Il s'appuie, pour le prouver, sur ce que chaque élément d'un corps ayant été déformé, puis étant revenu à sa première forme, il ne s'est créé aucun travail, ce qui a évidemment lieu, si la température de cet élément n'a pas changé.

Si on suppose que, dans l'état vibratoire, les molécules d'un corps solide sont sollicitées par des actions mutuelles fonctions de la distance, et de plus, soumises à des liaisons exprimables comme en mécanique par des équations $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$,..., entre les coordonnées des diffé-

rentes molécules, les équations du mouvement vibratoire d'une de ces molécules, dont les coordonnées sont $a+\xi$, $b+\eta$, $c+\zeta$ (a, b, c étant constants), seront de la forme

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{dV}{d\xi},\quad \frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{dV}{d\eta},\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{dV}{d\zeta},$$

analogue à celle des équations ordinaires de la mécanique analytique.

Il est aisé de voir que ξ, η, ζ étant excessivement petits, on devrait prendre pour V une fonction du second degré

$$A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2+2D\zeta\eta+2E\xi\zeta+2G\eta\xi,$$

et que, par suite, les trois vibrations correspondant à une même onde plane seraient rectangulaires; on en conclurait donc encore les équations (b).

Si nous enlevons à Θ son caractère symbolique, de manière à remplacer par exemple le terme $a(u^2)^2$ par au^4 et la somme des deux termes $fu^2.w^2+g(2uw)^2$ par un seul $(f+4g)u^2w^2$, nous aurons une fonction F, et si nous y considérons u, v, w comme des coordonnées rectangles,

$$F=1$$

sera l'équation d'une surface que nous appelons *surface indicatrice*.

Lorsque cette surface représente une sphère

$$a(u^2+v^2+w^2)^2=1,$$

les équations (b) donnent le mouvement de l'éther enfermé dans les corps cristallisés.

Mais les équations du mouvement vibratoire étant mises sous la forme (b), il suffit pour calculer les phénomènes lumineux avec plus d'exactitude, et avoir égard à la variation de la vitesse de propagation avec la durée de la vibration, de prendre dans Θ non-seulement des termes du second degré en u^2, v^2, w^2,..., $2uv$, mais encore tous les termes de degrés supérieurs.

Pour que les équations (b) ainsi entendues soient susceptibles d'être la représentation d'un phénomène physique, il faut que l'existence de

ces équations, relativement à un système d'axes adopté, entraîne les mêmes équations pour tout autre système de coordonnées rectangles. Ainsi les équations (a) jouissent de cette propriété, et nous démontrons qu'elle appartient également au système des équations (b).

Nous prouvons ensuite que les équations (b) renferment, comme cas particulier les équations (a), lorsqu'il n'entre dans celles-ci que des dérivées d'ordre pair. Cette propriété est curieuse en soi; mais il résulte aussi de là, que si le mouvement de l'éther était donné par les équations (a), en adoptant les équations (b) plus générales pour représenter ce mouvement, une étude intelligente des faits ramènerait bientôt aux premières; ce qui n'a pas lieu.

Enfin, dans le cas où le corps est isotrope, nos équations coïncident avec celles de Cauchy, de sorte que la loi qu'il a trouvée pour la dispersion dans ces corps, et qui a été confirmée par l'expérience, est aussi une conséquence de notre méthode.

On voit, d'après cela, combien notre induction est fondée; mais au surplus, nous montrerons quelle action élémentaire on peut imaginer entre deux molécules, pour que le mouvement vibratoire soit représenté par nos formules.

Pour que les équations (b) expriment un mouvement susceptible de se propager sans changement de densité, il faut et il suffit qu'en ôtant à la fonction Θ son caractère symbolique, elle se réduise à une fonction de $u + v^2 + w^2$; alors elles ont la dernière forme qu'on doit leur donner pour qu'elles représentent l'état vibratoire de l'éther.

La polarisation rotatoire, que l'on observe dans certains corps, comme le savait Fresnel, dépend des dérivées d'ordres impairs, et principalement de celles du troisième ordre; pour ces corps, il y aurait donc à ajouter des termes d'ordres impairs aux premiers membres des équations (b).

On pourait peut-être, au premier abord, penser que les équations de Cauchy ont sur ce point un certain avantage sur les nôtres, puisqu'elles renferment des termes d'ordres impairs; mais c'est le contraire.

En effet, il existe des liquides et des solides sans formes cristallines, qui jouissent du pouvoir rotatoire, et si, cherchant à appliquer les équations (a) à ces corps, on exprime que pour tout autre système de coordonnées ces formules restent telles qu'elles sont, c'est-à-dire que

H garde les mêmes coefficients, on trouve que H est une fonction rationnelle de $u^2 + v^2 + w^2$, et ne renferme pas par conséquent de termes d'ordres impairs, et les équations (a), pour lesquelles on s'attend à ce qu'elles donnent la polarisation rotatoire, n'en sont pas plus capables que les équations (b).

Nous terminons ce Mémoire par le développement complet des calculs relatifs à la dispersion de la lumière dans les cristaux uniaxes, en nous bornant aux termes du quatrième ordre, et nous établirons des formules déjà données, mais sans démonstration, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 28 novembre 1864.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Soient ξ, η, ζ les projections du déplacement d'une molécule d'un corps solide vibrant sur trois axes de coordonnées rectangulaires, et N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 les composantes des forces élastiques agissant sur trois plans parallèles aux plans de coordonnées au point considéré. Les équations du mouvement vibratoire sont (*Théorie de l'élasticité* de M. Lamé, 2ᵉ leçon)

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} &= \frac{d^2\xi}{dt^2},\\ \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} &= \frac{d^2\eta}{dt^2},\\ \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} &= \frac{d^2\zeta}{dt^2}, \end{aligned}\right.$$

en prenant pour unité la densité du corps.

Les valeurs des N_i, T_i sont données (3ᵉ leçon) par les formules

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} N_i = {} & A_i\frac{d\xi}{dx} + B_i\frac{d\eta}{dy} + C_i\frac{d\zeta}{dz} + D_i\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right)\\ & + E_i\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) + F_i\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right),\\ T_i = {} & \mathcal{A}_i\frac{d\xi}{dx} + \mathcal{B}_i\frac{d\eta}{dy} + \mathcal{C}_i\frac{d\zeta}{dz} + \mathcal{D}_i\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right)\\ & + \mathcal{E}_i\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) + \mathcal{F}_i\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right), \end{aligned}\right.$$

où l'on doit faire successivement i égale à 1, 2, 3.

Posons, comme *Cauchy*,

$$(3)\quad \begin{cases} \xi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\int\int\int\int\int \varphi_1(\alpha,\beta,\gamma,t)e^{u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)}d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, du\, dv\, dw, \\ \eta = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\int\int\int\int\int \varphi_2(\alpha,\beta,\gamma,t)e^{u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)}d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, du\, dv\, dw, \\ \zeta = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\int\int\int\int\int \varphi_3(\alpha,\beta,\gamma,t)e^{u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)}d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, du\, dv\, dw, \end{cases}$$

les intégrales étant prises depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et nous supposons

$$u = \mathrm{U}\sqrt{-1},\quad v = \mathrm{V}\sqrt{-1},\quad w = \mathrm{W}\sqrt{-1},\quad s = \mathrm{S}\sqrt{-1},$$

U, V, W, S étant réels. Substituons ces expressions dans les équations (1), après avoir remplacé N_1, $\mathrm{N}_2, \ldots, \mathrm{T}_3$ par leurs valeurs (2), et supprimant le signe intégral, qui porte sur tous les termes des équations, nous aurons trois équations de la forme suivante :

$$(4)\quad \begin{cases} 0 = -\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \mathrm{L}_1\varphi_1 + \mathrm{M}_1\varphi_2 + \mathrm{P}_1\varphi_3, \\ 0 = -\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \mathrm{L}_2\varphi_1 + \mathrm{M}_2\varphi_2 + \mathrm{P}_2\varphi_3, \\ 0 = -\frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + \mathrm{L}_3\varphi_1 + \mathrm{M}_3\varphi_2 + \mathrm{P}_3\varphi_3; \end{cases}$$

pour abréger, nous n'écrivons pas les polynômes homogènes du second degré, en u, v, w, que représentent L, $\mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{P}_3$.

Multiplions les équations (4) par A, B, C, et posons

$$(a)\quad \mathrm{A}\varphi_1 + \mathrm{B}\varphi_2 + \mathrm{C}\varphi_3 = \theta,$$

nous aurons, en les ajoutant,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = s^2\theta,$$

à la condition de déterminer A, B, C par les équations

$$\frac{\mathrm{L}_1\mathrm{A} + \mathrm{M}_1\mathrm{B} + \mathrm{P}_1\mathrm{C}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{L}_2\mathrm{A} + \mathrm{M}_2\mathrm{B} + \mathrm{P}_2\mathrm{C}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{L}_3\mathrm{A} + \mathrm{M}_3\mathrm{B} + \mathrm{P}_3\mathrm{C}}{\mathrm{C}} = s^2$$

qui peuvent encore s'écrire

$$(5)\qquad \begin{cases} (L_1 - s^2)A + M_1 B + P_1 C = 0, \\ L_2 A + (M_2 - s^2)B + P_2 C = 0, \\ L_3 A + M_3 B + (P_3 - s^2)C = 0, \end{cases}$$

et en éliminant A, B, C entre ces trois équations, nous aurons une équation qui sera du troisième degré en s^2, et du sixième degré en u, v, w, et que nous représenterons par

$$(6)\qquad F(u, v, w, s) = 0.$$

L'équation (6) donne trois valeurs pour s^2, les équations (5) trois systèmes de valeurs pour A, B, C; θ a aussi trois valeurs correspondantes, et on a trois équations telles que (a), qui déterminent $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Considérons le cas où A, B, C sont proportionnels aux cosinus des angles que font avec les axes coordonnés, les axes d'une surface du second degré, dont les inverses sont donnés par les racines s de l'équation (6). Nous avons alors

$$(b)\qquad M_1 = L_2, \quad P_1 = L_3, \quad M_3 = P_2;$$

et si on a écrit les valeurs de $L_1, M_2, \ldots, P_3$, on reconnaît que les trente-six coefficients $A_i, B_i, \ldots, \mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \ldots$ se réduisent à vingt et un, et l'on trouve en employant de nouvelles lettres pour représenter ces vingt et un coefficients

$$(7)\qquad \begin{cases} L_1 = au^2 + c_1 v^2 + b_1 w^2 + 2f_1 vw + 2h_1 uw + 2k_1 uv, \\ M_2 = c_1 u^2 + bv^2 + a_1 w^2 + 2g_2 vw + 2e_1 uw + 2k_2 uv, \\ P_3 = b_1 u^2 + a_1 v^2 + cw^2 + 2g_3 vw + 2h_3 uw + 2d_1 uv, \\ P_2 = f_1 u^2 + g_2 v^2 + g_3 w^2 + (f + a_1) vw + (k_3 + d_1) uw + (e_1 + h_2) uv, \\ P_1 = h_1 u^2 + e_1 v^2 + h_3 w^2 + (k_3 + d_1) vw + (e + b_1) uw + (g_1 + f_1) uv, \\ M_1 = k_1 u^2 + k_2 v^2 + d_1 w^2 + (e_1 + h_2) vw + (g_1 + f_1) uw + (d + c_1) uv. \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\frac{d\xi}{dx} = \delta_x, \quad \frac{d\eta}{dy} = \delta_y, \quad \frac{d\zeta}{dz} = \delta_z,$$

$$\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = \mu_{xy}, \quad \frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} = \mu_{xz}, \quad \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = \mu_{yz},$$

et les valeurs (2) de $N_1, N_2, \ldots, T_3$ deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
N_1 &= a\delta_x + d\delta_y + e\delta_z + g_1\mu_{yz} + h_1\mu_{xz} + k_1\mu_{xy},\\
N_2 &= d\delta_x + b\delta_y + f\delta_z + g_2\mu_{yz} + h_2\mu_{xz} + k_2\mu_{xy},\\
N_3 &= e\delta_x + f\delta_y + c\delta_z + g_3\mu_{yz} + h_3\mu_{xz} + k_3\mu_{xy},\\
T_1 &= g_1\delta_x + g_2\delta_y + g_3\delta_z + a_1\mu_{yz} + d_1\mu_{xz} + e_1\mu_{xy},\\
T_2 &= h_1\delta_x + h_2\delta_y + h_3\delta_z + d_1\mu_{yz} + b_1\mu_{xz} + f_1\mu_{xy},\\
T_3 &= k_1\delta_x + k_2\delta_y + k_3\delta_z + e_1\mu_{yz} + f_1\mu_{xz} + c_1\mu_{xy}.
\end{aligned}\right.$$

2. Si nous supposons le mouvement *simple*, les projections du déplacement d'une molécule au lieu d'être données par les formules (3), seront fournies par les parties réelles des expressions

$$(8) \qquad \xi = Ae^{ux+vy+wz-st}, \quad \eta = Be^{ux+vy+wz-st}, \quad \zeta = Ce^{ux+vy+wz-st},$$

où l'on prend

$$u = U\sqrt{-1}, \quad v = V\sqrt{-1}, \quad w = W\sqrt{-1}, \quad s = S\sqrt{-1},$$

U, V, W, S étant réels. Toutes les molécules situées dans un plan parallèle à

$$(c) \qquad ux + vy + wz = 0,$$

ont le même mouvement; et un ébranlement situé sur le plan (c) à l'instant initial, se propagera en une onde plane, et sera au bout du temps t sur le plan

$$(d) \qquad ux + vy + wz = st,$$

s étant donné par l'équation (6). A, B, C auront trois systèmes de va-

leurs résultant des formules (5), et si l'on admet les réductions (b), les trois vibrations correspondant à une même onde plane sont rectangulaires entre elles. $\frac{s}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$ représente la vitesse de l'onde plane (d), et puisque u, v, w, s sont liés entre eux par l'équation (6)

$$(e) \qquad F(u, v, w, s) = 0,$$

on obtiendra la *surface de l'onde*, qui est l'enveloppe du plan (d), en éliminant u, v, w, s entre les équations (d), (e) et

$$(f) \qquad \frac{x}{\frac{dF}{du}} = \frac{y}{\frac{dF}{dv}} = \frac{z}{\frac{dF}{dw}}.$$

Soit

$$(g) \qquad \mathfrak{F}(x, y, z) = 0,$$

l'équation de cette surface.

Le plan (d) est tangent à la surface de l'onde ; donc u, v, w sont proportionnels aux cosinus des angles que fait le plan tangent à la surface (g) avec les plans de coordonnées, et l'on a

$$(h) \qquad \frac{u}{\frac{d\mathfrak{F}}{dx}} = \frac{v}{\frac{d\mathfrak{F}}{dy}} = \frac{w}{\frac{d\mathfrak{F}}{dz}};$$

donc si l'on élimine x, y, z entre les équations (d), (g), (h), on aura l'équation (e), et l'on voit que l'on peut déduire l'équation (e) de l'équation (g), comme on obtient la seconde au moyen de la première. Cette propriété est démontrée dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* de Cauchy, t. II, p. 102.

Faisons une transformation de coordonnées donnée par les équations

$$(A) \qquad \begin{cases} x = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ y = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z', \\ z = p_1 x' + p_2 y' + p_3 z'. \end{cases}$$

De là, on déduit les formules symboliques

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d.}{dx'} &= m_1 \frac{d.}{dx} + n_1 \frac{d.}{dy} + p_1 \frac{d.}{dz}, \\ \frac{d.}{dy'} &= m_2 \frac{d.}{dx} + n_2 \frac{d.}{dy} + p_2 \frac{d.}{dz}, \\ \frac{d.}{dz'} &= m_3 \frac{d.}{dx} + n_3 \frac{d.}{dy} + p_3 \frac{d.}{dz}, \end{aligned}\right.$$

et d'après les relations qui existent entre les cosinus $m_1, n_1, \ldots, p_3$, on a encore

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d.}{dx} &= m_1 \frac{d.}{dx'} + m_2 \frac{d.}{dy'} + m_3 \frac{d.}{dz'}, \\ \frac{d.}{dy} &= n_1 \frac{d.}{dx'} + n_2 \frac{d.}{dy'} + n_3 \frac{d.}{dz'}, \\ \frac{d.}{dz} &= p_1 \frac{d.}{dx'} + p_2 \frac{d.}{dy'} + p_3 \frac{d.}{dz'}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on représente les signes de différentiation $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$ par u, v, w, et de même $\frac{d}{dx'}, \frac{d}{dy'}, \frac{d}{dz'}$ par u', v', w', on aura les formules

$$\text{(B)} \qquad \left\{\begin{aligned} u &= m_1 u' + m_2 v' + m_3 w', \\ v &= n_1 u' + n_2 v' + n_3 w', \\ w &= p_1 u' + p_2 v' + p_3 w', \end{aligned}\right.$$

qui sont toutes semblables aux formules (A). D'après cette notation, les équations de l'élasticité peuvent s'écrire

$$\text{(C)} \qquad \left\{\begin{aligned} L_1\xi + M_1\eta + P_1\zeta - \frac{d^2\xi}{dt^2} &= 0, \\ M_1\xi + M_2\eta + P_2\zeta - \frac{d^2\eta}{dt^2} &= 0, \\ P_1\xi + P_2\eta + P_3\zeta - \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= 0, \end{aligned}\right.$$

$L_1, M_1, \ldots, P_3$ étant les polynômes homogènes du second degré en u, v, w du numéro précédent, et u, v, w représenteront de véritables

quantités dans le cas où le mouvement sera simple et donné par les formules (8).

D'après les formules (B), on voit qu'il est permis de simplifier l'équation (e) par une transformation de coordonnées, et que pour cela, il suffit de considérer u, v, w comme de véritables coordonnées.

3. On peut par un raisonnement fort simple reconnaître quel est en général le degré de la surface de l'onde.

Soit une surface du sixième degré

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Si l'on se propose de mener à cette surface un plan tangent parallèle au plan $ux + vy + wz = 0$, on aura les équations

$$\frac{u}{\frac{df}{dx}} = \frac{v}{\frac{df}{dy}} = \frac{w}{\frac{df}{dz}}. \tag{2}$$

et par conséquent les équations du cinquième degré en x, y, z

$$u\frac{df}{dy} - v\frac{df}{dx} = 0, \quad u\frac{df}{dz} - w\frac{df}{dx} = 0; \tag{3}$$

on aura donc les coordonnées du point de contact au moyen des équations (1) et (3). En éliminant y et z par exemple, on aura une équation du degré $6 \times 5^2 = 150$ par rapport à x; et on en conclut qu'il y a cent cinquante plans tangents parallèles au plan donné.

Si, au lieu d'opérer de la sorte, on pose

$$ux + vy + wz = s, \tag{4}$$

et si on élimine x, y, z entre les équations (1), (2) et (4), on obtient l'équation

$$\mathfrak{F}(u, v, w, s) = 0. \tag{5}$$

$\frac{s}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$ représente la distance de l'origine des coordonnées à l'un des cent cinquante plans tangents; s doit donc dépendre d'une équation

du cent cinquantième degré. Or l'équation (5) est homogène, car (2) et (4) subsistant quand on remplace u, v, w, s par lu, lv, lw, ls, il en est de même de l'équation (5); elle est donc aussi du cent cinquantième degré par rapport à u, v, w.

Supposons ensuite que l'on reprenne l'équation

$$(6) \qquad F(u, v, w, s) = 0$$

du numéro précédent, qui, étant homogène, peut s'écrire

$$f\left(\frac{u}{s}, \frac{v}{s}, \frac{w}{s}\right) = 0,$$

et que l'on recherche l'équation de la surface de l'onde, on aura les mêmes calculs que ci-dessus, et on trouvera pour cette surface l'équation

$$\mathfrak{F}(x, y, z, 1) = 0$$

qui est en général du cent cinquantième degré [*].

La surface de l'onde peut cependant être quelquefois d'un degré beaucoup moindre; ainsi, en particulier, il est possible que l'équation (6) ne soit que du quatrième degré, et la surface de l'onde est au plus du degré $4 \times 3^2 = 36$.

4. Rappelons que le mouvement vibratoire d'un corps solide est donné par les équations (C) du n° 2, et écrivons la fonction symbo-

---

[*] A un certain point de vue, la surface de l'onde n'est pas plus compliquée que la surface (6) du sixième degré, u, v, w étant les coordonnées. En effet, si la surface de l'onde est rencontrée par une droite en cent cinquante points réels ou imaginaires, d'un autre côté elle n'a que six plans tangents réels ou imaginaires parallèles à un plan donné, et ces nombres sont à intervertir pour la surface du sixième degré. Par une considération semblable, on doit regarder comme plus simples ou plus remarquables les courbes des degrés troisième, quatrième, etc., quand leurs *réciproques* sont du même degré. [L'onde et la surface (6) sont dites *réciproques l'une de l'autre*.]

lique

$$\Theta = \frac{a}{2}(u^2)^2 + \frac{b}{2}(v^2)^2 + \frac{c}{2}(w^2)^2 + k_1\, 2uv.u^2 + k_2\, 2uv.v^2 + h_1\, 2uw.u^2$$
$$+ h_3\, 2uw.w^2 + g_2\, 2vw.v^2 + g_3\, 2vw.w^2 + c_1 u^2.v^2 + b_1 u^2.w^2$$
$$+ a_1 v^2.w^2 + f_1\, 2vw.u^2 + e_1\, 2uw.v^2 + d_1\, 2uv.w^2 + \frac{f+a_1}{4}(2vw)^2$$
$$+ \frac{e+b_1}{4}(2uw)^2 + \frac{d+c_1}{4}(2uv)^2 + \frac{k_3+d_1}{2}\, 2uw.2vw$$
$$+ \frac{e_1+h_2}{2}\, 2uv.2uw + \frac{g_1+f_1}{2}\, 2uv.2uw.$$

On obtiendra les quantités L_1, M_2, P_3, P_2, P_1, M_1 qui sont données par les formules (7) du n° 1, en prenant les dérivées de Θ respectivement par rapport à u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2uw$, $2uv$.

Supposons que l'on fasse une transformation de coordonnées, indiquée par les formules

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ y &= n_1 x' + n_2 y' + n_3 z', \\ z &= p_1 x' + p_2 y' + p_3 z'; \end{aligned} \right.$$

alors tous les coefficients a, b, c, k_1,... seront dans les trois équations du mouvement changés respectivement en d'autres, que nous désignons par

$$a',\ b',\ c',\ k'_1, \ldots;$$

d'ailleurs u, v, w seront changés en u', v', w', et l'on a

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= m_1 u' + m_2 v' + m_3 w', \\ v &= n_1 u' + n_2 v' + n_3 w', \\ w &= p_1 u' + p_2 v' + p_3 w'; \end{aligned} \right.$$

on obtiendra donc les quantités L'_1, M'_2, P'_3, P'_2, P'_1, M'_1 qui remplaceront L_1, M_2, P_3, P_2, P_1, M_1 et se trouveront dans les équations

$$L'_1 \xi' + M'_1 \eta' + P'_1 \zeta' - \frac{d^2\xi'}{dt^2} = 0, \quad \ldots,$$

en prenant par rapport à u'^2, v'^2, w'^2, $2v'w'$, $2w'u'$, $2u'v'$ les dérivées de la fonction symbolique

$$\Theta' = \frac{a'}{2}(u'^2)^2 + \frac{b'}{2}(v'^2)^2 + \frac{c'}{2}(w'^2)^2 + k'_1\, 2u'v'.u'^2$$
$$+ k'_2\, 2u'v'.v'^2 + \ldots + \frac{g'_1 + f'_1}{2}\, 2u'v'.2u'w$$

Or, écrivons la fonction

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} = \frac{a}{2}u^4 + \frac{b}{2}v^4 + \frac{c}{2}w^4 + 2k_1u^3v + 2k_2uv^3 + 2h_1u^3w + 2h_3uw^3 \\ + 2g_2v^3w + 2g_3vw^3 + (d + 2c_1)u^2v^2 + (e + 2b_1)u^2w^2 \\ + (f + 2a_1)v^2w^2 + 2(g_1 + 2f_1)u^2vw + 2(h_2 + 2e_1)v^2uw \\ + 2(k_3 + 2d_1)w^2uv;\end{aligned}$$

au caractère symbolique près, Θ est la même chose que $\mathfrak{N}$; donc, puisque la transformation de coordonnées que nous avons faite change Θ en Θ', cette même transformation change $\mathfrak{N}$ en

$$\mathfrak{N}' = \frac{a'}{2}u'^4 + \frac{b'}{2}v'^4 + \frac{c'}{2}w'^4 + 2k'_1u'^3v' + 2k'_2u'v'^3$$
$$+ \ldots + 2(k'_3 + 2d'_1)w'^2u'v'.$$

Enfin, nous déduisons de là, que cette transformation de coordonnées change le polynôme

$$\begin{aligned}F = ax^4 + by^4 + cz^4 + 4k_1x^3y + 4k_2xy^3 + 4h_1x^3z + 4h_3xz^3 \\ + 4g_2y^3z + 4g_3yz^3 + 2(d + 2c_1)x^2y^2 + 2(e + 2b_1)x^2z^2 \\ + 2(f + 2a_1)y^2z^2 + 4(g_1 + 2f_1)x^2yz + 4(h_2 + 2e_1)y^2xz \\ + 4(k_3 + 2d_1)z^2xy,\end{aligned}$$

qui se déduit de $\mathfrak{N}$ en le doublant et remplaçant u, v, w par x, y, z, en le polynôme

$$F' = a'x'^4 + b'y'^4 + c'z'^4 + \ldots.$$

Considérons les deux équations

$$F = 1 \quad \text{et} \quad F = 0,$$

qui représentent une surface du quatrième degré que nous appellerons *surface indicatrice*, et son cône asymptote, que nous appellerons le *cône indicateur;* il est aisé de voir qu'une transformation de coordonnées, qui simplifie l'équation du cône indicateur, simplifie ordinairement les équations du mouvement vibratoire.

Ce qui précède permet de déterminer les quinze quantités

$$a',\ b',\ c',\ k'_1,\ldots,\ k'_3+2d'_1$$

au moyen des quinze autres

$$a,\ b,\ c,\ k_1,\ldots,\ k_3+2d_1;$$

mais si on a en réalité à effectuer une transformation de coordonnées, il faut aussi connaître les six quantités a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1, f'_1, et pour cela, on observera qu'on déduit Θ' de Θ, en substituant dans le dernier pour u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2wu$, $2uv$,

$$(\mathrm{E})\left\{\begin{array}{l} u^2 = m_1^2 u'^2 + m_2^2 v'^2 + m_3^2 w'^2 + m_2 m_3 (2v'w') + m_3 m_1 (2w'u') \\ \qquad + m_1 m_2 (2u'v') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2uv = 2m_1 n_1 u'^2 + 2m_2 n_2 v'^2 + 2m_3 n_3 w'^2 + (m_2 n_3 + m_3 n_2)(2v'w') \\ \qquad + (m_3 n_1 + m_1 n_3)(2w'u') + (m_1 n_2 + m_2 n_1)(2u'v'), \end{array}\right.$$

et regardant u'^2, v'^2,..., $2u'v'$ comme des signes indécomposables, de sorte que, par exemple, $2u'v'.2u'w'$ n'équivaut pas à $2u'^2.2v'w'$.

5. Étudions le cas où le corps possède un axe d'isotropie, c'est-à-dire un axe, tout autour duquel il possède la même élasticité; prenons-le pour axe des z. Il est évident que la surface indicatrice est de révolution, et que son équation peut s'écrire

$$\mathrm{A}(x^2+y^2)^2 + 2\mathrm{B}(x^2+y^2)z^2 + \mathrm{C}z^4 = 1,$$

ou

$$\mathrm{A}x^4 + \mathrm{A}y^4 + \mathrm{C}z^4 + 2\mathrm{A}x^2y^2 + 2\mathrm{B}x^2z^2 + 2\mathrm{B}y^2z^2 = 1;$$

et, en se reportant à l'expression de F, on en conclut

$$k_1 = k_2 = h_1 = h_3 = g_2 = g_3 = 0,\quad g_1 = -2f_1,\quad h_2 = -2e_1,\quad k_3 = -2d_1,$$
$$a = b = \mathrm{A},\quad d = \mathrm{A} - 2c_1,\quad c = \mathrm{C},\quad e = \mathrm{B} - 2b_1,\quad f = \mathrm{B} - 2a_1.$$

Mais la condition que nous venons d'exprimer n'est pas suffisante; car il faut, et cette condition renferme la première, que, lorsque l'on fera tourner autour de l'origine l'angle droit des x et y, Θ ne change pas de forme, j'entends que Θ' ait les mêmes coefficients que Θ. Nous savons qu'on passe de l'expression de Θ à celle de Θ' à l'aide des formules (E); mais comme ici, les expressions (B) se réduisent à

$$u = m_1 u' + m_2 v', \quad v = n_1 u' + n_2 v', \quad w' = w$$

avec

$$m_1 = n_2 = \cos\alpha, \quad m_2 = -n_1 = -\sin\alpha,$$

les expressions à substituer dans Θ sont

$$\left\{\begin{aligned} u^2 &= m_1^2 u'^2 + m_2^2 v'^2 + m_1 m_2 (2u'v'),\\ v^2 &= n_1^2 u'^2 + n_2^2 v'^2 + n_1 n_2 (2u'v'),\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} 2wv &= n_1 (2u'w) + n_2 (2v'w),\\ 2uw &= m_1 (2u'w) + m_2 (2v'w),\\ 2uv &= 2m_1 n_1 u'^2 + 2m_2 n_2 v'^2 + (m_1 n_2 + n_1 m_2)(2u'v').\end{aligned}\right.$$

De ce calcul, on conclura facilement les nouvelles relations

$$a_1 = b_1, \quad d_1 = e_1 = f_1 = 0.$$

Faisons ces réductions dans les expressions (7) de $L_1, M_2, \ldots, M_1$ du n° **1**, et portons-les dans les équations (C) du mouvement écrites au n° **2**; remplaçons aussi a_1, c_1 par α, γ, et nous aurons les formules

$$(D)\quad \left\{\begin{aligned} &(Au^2 + \gamma v^2 + \alpha w^2)\xi + (A-\gamma)uv\eta + (B-\alpha)uw\zeta - \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0,\\ &(A-\gamma)uv\xi + (Av^2 + \alpha w^2 + \gamma u^2)\eta + (B-\alpha)vw\zeta - \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0,\\ &(B-\alpha)uw\xi + (B-\alpha)vw\eta + (Cw^2 + \alpha u^2 + \alpha v^2)\zeta - \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0.\end{aligned}\right.$$

Si nous supposons le mouvement simple, les projections du déplacement d'une molécule seront données par les parties réelles des expres-

sions (8) du n° **2**, ou par

$$\xi = \mathcal{A}\cos(Ux + Vy + Wz - St), \quad \eta = \mathcal{B}\cos(Ux + Vy + Wz - St),$$
$$\zeta = \mathcal{C}\cos(Ux + Vy + Wz - St),$$

et dans les équations (D), u, v, w au lieu de représenter des signes de différentiation, représentent des quantités; nous pourrons en outre remplacer $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ par $s^2\xi$, $s^2\eta$, $s^2\zeta$.

D'après la nature du corps, tout restant le même dans un plan quelconque qui passe par l'axe des z, on peut, sans particulariser la question, prendre le plan $ux + vy + wz = 0$, perpendiculaire au plan des xz, ce qui revient à faire $v = 0$ dans les équations (D).

La deuxième devient

$$(\alpha w^2 + \gamma u^2 - s^2)\eta = 0,$$

et les deux autres

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} (Au^2 + \alpha w^2 - s^2)\xi + (B - \alpha)uw\zeta = 0, \\ (B - \alpha)uw\xi + (Cw^2 + \alpha u^2 - s^2)\zeta = 0. \end{array} \right.$$

On peut satisfaire à ces équations :

1° En posant $\xi = 0$, $\zeta = 0$,

$$(b) \quad \alpha w^2 + \gamma u^2 - s^2 = 0,$$

2° En posant $\eta = 0$,

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} s^4 - [(A + \alpha)u^2 + (C + \alpha)w^2]s^2 + A\alpha u^4 + C\alpha w^4 \\ \qquad\qquad + (AC - B^2 + 2B\alpha)u^2w^2 = 0, \end{array} \right.$$

cette dernière provenant de l'élimination de $\frac{\xi}{\zeta}$ entre les équations (a).

La première solution donne une onde plane, dont la vitesse $\frac{s}{\sqrt{u^2 + w^2}}$ résulte de (b), et qui contient la vibration; la seconde deux ondes planes, dont les vibrations sont parallèles au plan des yz, et les vitesses de ces deux ondes résultent de l'équation (c).

Il est à noter que les équations (a) peuvent se mettre sous la forme

$$\left(\frac{d\mathrm{T}}{d(u^2)} - s^2\right)\xi + \frac{d\mathrm{T}}{d(2uw)}\zeta = 0, \quad \frac{d\mathrm{T}}{d(2uw)}\xi + \left(\frac{d\mathrm{T}}{d(w^2)} - s^2\right)\zeta = 0,$$

en prenant

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{A}}{2}(u^2)^2 + \frac{\mathrm{C}}{2}(w^2)^2 + \alpha u^2.w^2 + \frac{\mathrm{B}-\alpha}{2}(2uw)^2.$$

En éliminant ξ, η, ζ entre les équations (D), nous aurions eu une équation

$$\mathrm{F}(u, v, w, s) = 0,$$

et on sait par quelle méthode on peut en déduire l'équation de la surface de l'onde. Si on applique cette méthode aux équations (b) et (c), on se débarrasse d'une dimension, et il est aisé de voir qu'on obtient ainsi les méridiens des deux surfaces appartenant à l'onde, qui est de révolution autour de l'axe des z.

De l'équation (b), on déduit la courbe méridienne

$$\frac{x^2}{\gamma} + \frac{z^2}{\alpha} - 1 = 0,$$

et le raisonnement du n° 3 montre que l'équation (c) doit, pour la seconde courbe méridienne, conduire à une équation du degré $4 \times 3 = 12$. Toutefois, comme les cinq coefficients de l'équation (c) ne sont pas indépendants l'un de l'autre, on pourrait avoir quelque crainte que l'équation de l'onde fût d'un degré moindre. Ayant fait le calcul direct, qui est trop prolixe pour être reproduit, nous avons pu reconnaître que cette équation est effectivement du douzième degré.

On ne sera peut-être pas fâché de connaître l'équation de la surface de l'onde pour un cas particulier, relativement assez simple. Si l'on fait $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = 0$, $\gamma = \alpha$, on a pour l'équation (c)

$$s^4 - [\alpha(u^2 + w^2) + \mathrm{C}w^2]s^2 + \mathrm{C}\alpha w^4 = 0;$$

la seconde surface qui compose l'onde n'est plus que du huitième degré; on trouve en effet par un calcul qui n'offre pas de difficulté, que

l'équation du méridien est, en posant $\frac{C}{\alpha} = D$,

$$\begin{aligned} 0 = z^8 &+ z^6(1+D)(4x^2-\alpha) \\ &+ z^4[(6+4D+6D^2)x^4 - (3+26D+3D^2)\alpha x^2 + D\alpha^2] \\ &+ z^2x^2[4(1-D-D^2+D^3)x^4 \\ &\qquad - (3+13D+13D^2+3D^3)\alpha x^2 + 20D\alpha^2(1+D)] \\ &+ x^2(x^2-\alpha)[(1-D)^2x^2+4D\alpha]^2. \end{aligned}$$

Cette équation se décompose dans le cas de $D = 1$, et devient

$$[z^4 + 8x^2z^2 + 16(x^4 - \alpha x^2)](z^2-\alpha)^2 = 0;$$

mais nous ne nous arrêterons pas davantage à cet exemple.

6. Occupons-nous maintenant du cas où la surface indicatrice est une sphère, et a pour équation

$$\alpha(x^2+y^2+z^2)^2 = 1$$

ou

$$\alpha(x^4+y^4+z^4+2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2) = 1.$$

D'après l'expression de F du n° **4**, on a les relations

$$a = b = c = \alpha, \quad k_1 = k_2 = h_1 = h_3 = g_2 = g_3 = 0,$$
$$d = \alpha - 2c_1, \quad e = \alpha - 2b_1, \quad f = \alpha - 2a_1, \quad g_1 = -2f_1, \quad h_2 = -2e_1,$$
$$k_3 = -2d_1.$$

Les expressions de L_1, M_2,..., M_1 du n° **1** deviennent

$$(D)\quad \left\{\begin{aligned} L_1 &= \alpha u^2 + c_1v^2 + b_1w^2 + 2f_1vw, \\ M_2 &= c_1u^2 + \alpha v^2 + a_1w^2 + 2e_1uw, \\ P_3 &= b_1u^2 + a_1v^2 + \alpha w^2 + 2d_1uw, \\ P_2 &= f_1u^2 + (\alpha - a_1)vw - d_1uw - e_1uv, \\ P_1 &= e_1v^2 - d_1vw + (\alpha - b_1)uw - f_1uv, \\ M_1 &= d_1w^2 - e_1vw - f_1uw + (\alpha - c_1)uv. \end{aligned}\right.$$

Portons ces expressions dans les équations

$$L_1\xi + M_1\eta + P_1\zeta = s^2\xi, \quad M_1\xi + M_2\eta + P_2\zeta = s^2\eta,$$
$$P_1\xi + P_2\eta + P_3\zeta = s^2\zeta,$$

et nous obtiendrons trois formules, qu'on pourra transformer dans les suivantes :

$$(\text{G})\quad \left\{\begin{aligned} &(d_1 w - e_1 v)(w\eta - v\zeta) - (b_1 w + f_1 v)(u\zeta - w\xi) \\ &\quad + (c_1 v + f_1 w)(v\xi - u\eta) + \alpha u(u\xi + v\eta + w\zeta) = s^2\xi, \\ &(f_1 u - d_1 w)(u\zeta - w\xi) - (c_1 u + e_1 w)(v\xi - u\eta) \\ &\quad + (a_1 w + e_1 u)(w\eta - v\zeta) + \alpha v(u\xi + v\eta + w\zeta) = s^2\eta, \\ &(e_1 v - f_1 u)(v\xi - u\eta) - (a_1 v + d_1 u)(w\eta - v\zeta) \\ &\quad + (b_1 u + d_1 v)(u\zeta - w\xi) + \alpha w(u\xi + v\eta + w\zeta) = s^2\zeta. \end{aligned}\right.$$

Multiplions ces trois équations par ξ, η, ζ et ajoutons, après avoir posé

$$w\eta - v\zeta = \text{X}, \quad u\zeta - w\xi = \text{Y}, \quad w\xi - u\eta = \text{Z}, \quad u\xi + v\eta + w\zeta = \theta,$$

nous aurons

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} s^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \alpha\theta^2 &+ a_1\text{X}^2 + b_1\text{Y}^2 \\ &+ c_1\text{Z}^2 - 2f_1\text{YZ} - 2e_1\text{ZX} - 2d_1\text{XY}. \end{aligned}\right.$$

Si on fait une transformation de coordonnées indiquée par les formules

$$\left\{\begin{aligned} u &= m_1 u' + m_2 v' + m_3 w', \\ v &= n_1 u' + n_2 v' + n_3 w', \\ w &= p_1 u' + p_2 v' + p_3 w'; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= m_1 \xi' + m_2 \eta' + m_3 \zeta', \\ \eta &= n_1 \xi' + n_2 \eta' + n_3 \zeta', \\ \zeta &= p_1 \xi' + p_2 \eta' + p_3 \zeta'; \end{aligned}\right.$$

on a aussi

$$\left\{\begin{aligned} \text{X} &= m_1\text{X}' + m_2\text{Y}' + m_3\text{Z}', \\ \text{Y} &= n_1\text{X}' + n_2\text{Y}' + n_3\text{Z}', \\ \text{Z} &= p_1\text{X}' + p_2\text{Y}' + p_3\text{Z}', \end{aligned}\right.$$

X′, Y′, Z′ représentant $w'\eta' - v'\zeta'$, etc. D'après la théorie des surfaces du second degré, on peut, en choisissant les axes de coordonnées, faire disparaître les coefficients d_1, e_1, f_1 de la formule (d) et par suite des formules (G) et des expressions (D), et les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$
\text{(H)}\quad \left\{
\begin{aligned}
&[\alpha(u^2+v^2+w^2)+(c_1-\alpha)v^2+(b_1-\alpha)w^2-s^2]\xi \\
&\qquad\qquad -(c_1-\alpha)uv\eta-(b_1-\alpha)uw\zeta=0,\\
&-(c_1-\alpha)uv\xi+[\alpha(u^2+v^2+w^2)+(a_1-\alpha)w^2\\
&\qquad\qquad +(c_1-\alpha)u^2-s^2]\eta-(a_1-\alpha)vw\zeta=0,\\
&-(b_1-\alpha)uw\xi-(a_1-\alpha)vw\eta\\
&\quad +[\alpha(u^2+v^2+w^2)+(b_1-\alpha)u^2+(a_1-\alpha)v^2]\zeta=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Par la forme (G), on voit immédiatement que ces équations sont satisfaites par

$$
\text{(I)}\qquad s^2=\alpha(u^2+v^2+w^2),\quad \frac{\xi}{u}=\frac{\eta}{v}=\frac{\zeta}{w},
$$

et il en résulte que l'onde contient une première surface, qui est une sphère

$$x^2+y^2+z^2=\alpha,$$

sur laquelle la vibration est longitudinale, c'est-à-dire normale à l'onde.

Si l'on fait $\alpha=0$, les équations (G) et (H) sont celles qui sont données par M. Lamé dans la 17e leçon de sa *Théorie de l'élasticité* pour représenter la propagation du mouvement de l'éther renfermé dans les corps cristallisés. Or, si on observe la forme des équations (H), on reconnaît qu'on passe du cas où α est nul à celui où il ne l'est pas, en remplaçant a_1, b_1, c_1 par $a_1-\alpha$, $b_1-\alpha$, $c_1-\alpha$ et s^2 par $s^2-\alpha(u^2+v^2+w^2)$.

En éliminant ξ, η, ζ entre les trois équations (H) dans la supposition de $\alpha=0$, on a

$$
\begin{aligned}
s^2\{s^4-[(b+c)u^2+(c+a)v^2+(a+b)w^2]s^2\\
+(bcu^2+cav^2+abw^2)(u^2+v^2+w^2)\}=0,
\end{aligned}
$$

et si on fait les changements qui viennent d'être indiqués, pour passer au cas où α n'est pas nul, le facteur s^2 se trouve seulement remplacé par

$$s^2 - \alpha(u^2 + v^2 + w^2);$$

on en conclut facilement que l'on peut supposer α nul ou non, et que l'on a toujours la même onde, jouissant des mêmes propriétés; on a donc, d'après ce qui est démontré dans l'ouvrage de M. Lamé, auquel nous renvoyons le lecteur, l'onde de Fresnel, sur laquelle la vibration est transversale, c'est-à-dire située dans l'onde, et parallèle au plan de polarisation.

Si la propagation du mouvement que nous étudions avait lieu dans un corps solide, en ébranlant les molécules de ce corps, l'onde sphérique qui se propage avec changement de densité serait seule capable d'ébranler l'air et de transmettre un son. Au contraire, si cette propagation s'effectue dans l'éther d'un corps cristallisé, l'éther étant incompressible, on doit supposer ξ, η, ζ nuls dans les équations (I), et l'onde sphérique est invisible.

Nous terminerons cet article en faisant observer combien l'étude actuelle se distingue par sa simplicité de l'étude générale du mouvement vibratoire qui se propage dans un corps solide. D'abord la surface indicatrice se réduit ici à une sphère.

Ensuite il est ordinairement impraticable de déterminer au moyen de l'équation

$$(e) \qquad F(u, v, w, s) = 0,$$

appelée par Cauchy équation *caractéristique,* l'équation de la surface de l'onde qui est du cent cinquantième degré, et on doit se borner à la construire par points. Pour cela, on construit d'abord la surface représentée par l'équation (e), où u, v, w sont censés désigner des coordonnées, on mène en un point quelconque (u, v, w) de cette surface un plan tangent, sur lequel on abaisse de l'origine o une perpendiculaire R; enfin on prend sur cette droite une longueur $oP = \frac{s}{R}$, et P est un point de l'onde. Cette construction permet de discuter la surface de l'onde. Mais ici l'onde se réduit à une sphère et à une sur-

face du quatrième degré, et l'on sait déterminer son équation qui est

$$(x^2+y^2+z^2-\alpha)\{(x^2+y^2+z^2)(ax^2+by^2+cz^2) \\ -[a(b+c)x^2+b(c+a)y^2+c(a+b)z^2]+abc\}=0.$$

Dans le cas général, il n'y a que six plans tangents à l'onde parallèles à un plan donné; mais si l'on se propose de mener par une droite tous les plans tangents, ce qui est un problème plus général, il n'est pas permis d'en conclure qu'il n'y en ait que six, et d'après la construction d'Huyghens on peut avoir plus de trois rayons réfractés correspondants à un rayon incident : dans le cas actuel, au contraire, on sait qu'il n'y en a que trois.

Enfin, il est encore bon de remarquer que l'on passe de l'équation de l'onde à l'équation caractéristique en changeant x, y, z en $\frac{u}{s}$, $\frac{v}{s}$, $\frac{w}{s}$, et a, b, c en $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{\alpha}$; de sorte que la surface caractéristique est analogue à celle de l'onde.

Notons en passant qu'en général si la surface caractéristique a un ombilic, il existe sur l'onde une courbe tout le long de laquelle un même plan est tangent, et *vice versâ;* et il résulte de ce qui précède qu'il suffit de constater que l'onde de Fresnel jouit d'une de ces deux propriétés géométriques, pour en conclure qu'elle possède l'autre.

DEUXIÈME PARTIE.

1. Nous avons vu que les équations

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned} &\frac{d\Theta}{d(u^2)}\xi+\frac{d\Theta}{d(2uv)}\eta+\frac{d\Theta}{d(2uw)}\zeta=\frac{d^2\xi}{dt^2},\\ &\frac{d\Theta}{d(2uv)}\xi+\frac{d\Theta}{d(v^2)}\eta+\frac{d\Theta}{d(2vw)}\zeta=\frac{d^2\eta}{dt^2},\\ &\frac{d\Theta}{d(2uw)}\xi+\frac{d\Theta}{d(2vw)}\eta+\frac{d\Theta}{d(w^2)}\zeta=\frac{d^2\zeta}{dt^2}\end{aligned}\right.$$

représentent l'état vibratoire d'un corps solide homogène, si Θ est un polynôme qui ne renferme que des termes du second degré par rapport aux six symboles u^2, v^2, w^2,..., $2uv$, et qu'elles donnent le mou-

vement de l'éther, lorsque Θ se réduit à une fonction de $u^2+v^2-w^2$, après qu'on a ôté à cette expression son caractère symbolique.

Mais lorsqu'on veut étudier la question avec plus d'approximation, il faut faire entrer dans les équations des dérivées d'ordre supérieur au second; c'est ce qui est indispensable dans la théorie de la lumière. En effet, si la vitesse du son ne dépend pas d'une manière sensible de la durée de la vibration, l'expérience prouve au contraire que cet élément a une influence notable sur la vitesse de propagation des rayons lumineux, et détermine dans la réfraction la dispersion des diverses couleurs.

Θ ayant la forme indiquée ci-dessus, la vitesse de propagation résultant des équations (a) ne dépend pas de cette durée, mais elle en dépendra, comme nous verrons, si conservant les équations (a) on prend pour Θ une série qui renferme non-seulement des termes du second degré par rapport aux symboles u^2, v^2,..., $2uv$, mais encore des termes des degrés troisième, quatrième, etc.

2. Toutefois, pour que les équations (a) ainsi entendues soient susceptibles d'une interprétation physique, il est indispensable qu'elles subsistent après une transformation de coordonnées, et nous commencerons par démontrer qu'elles jouissent de cette propriété.

A cet effet, comparons les équations (a) aux équations

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\mathrm{H}}{du^2}\xi+\frac{d^2\mathrm{H}}{du\,dv}\eta+\frac{d^2\mathrm{H}}{du\,dw}\zeta=\frac{d^2\xi}{dt^2},\\ &\frac{d^2\mathrm{H}}{du\,dv}\xi+\frac{d^2\mathrm{H}}{dv^2}\eta+\frac{d^2\mathrm{H}}{dv\,dw}\zeta=\frac{d^2\eta}{dt^2},\\ &\frac{d^2\mathrm{H}}{du\,dw}\xi+\frac{d^2\mathrm{H}}{dv\,dw}\eta+\frac{d^2\mathrm{H}}{dw^2}\zeta=\frac{d^2\zeta}{dt^2},\end{aligned}\right.$$

H étant une fonction de u, v, w, et faisons une transformation de coordonnées rectangulaires indiquée par les formules

$$\left\{\begin{aligned} u&=m_1u'+m_2v'+m_3w',\\ v&=n_1u'+n_2v'+n_3w',\\ w&=p_1u'+p_2v'+p_3w',\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} u'&=m_1u+n_1v+p_1w,\\ v'&=m_2u+n_2v+p_2w,\\ w'&=m_3u+n_3v+p_3w.\end{aligned}\right.$$

Nous aurons à remplacer, dans les équations (b), ξ, η ζ, $\frac{d^2H}{du^2}$, $\frac{d^2H}{dv^2}$, $\frac{d^2H}{dw^2}$, ..., $\frac{d^2H}{du\,dv}$ par les expressions

$$(c)\quad \begin{cases} \xi = m_1\xi' + m_2\eta' + m_3\zeta', \\ \eta = n_1\xi' + n_2\eta' + n_3\zeta', \\ \zeta = p_1\xi' + p_2\eta' + p_3\zeta', \end{cases}$$

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2H}{du^2} &= \frac{d^2H}{du'^2}m_1^2 + \frac{d^2H}{dv'^2}m_2^2 + \frac{d^2H}{dw'^2}m_3^2 \\ &\quad + 2\frac{d^2H}{dv'\,dw'}m_2m_3 + 2\frac{d^2H}{dw'\,du'}m_3m_1 + 2\frac{d^2H}{du'\,dv'}m_1m_2, \\ \frac{d^2H}{dv^2} &= \frac{d^2H}{du'^2}n_1^2 + \frac{d^2H}{dv'^2}n_2^2 + \frac{d^2H}{dw'^2}n_3^2 \\ &\quad + 2\frac{d^2H}{dv'\,dw'}n_2n_3 + 2\frac{d^2H}{dw'\,du'}n_3n_1 + 2\frac{d^2H}{du'\,dv'}n_1n_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^2H}{du\,dv} &= \frac{d^2H}{du'^2}m_1n_1 + \frac{d^2H}{dv'^2}m_2n_2 + \frac{d^2H}{dw'^2}m_3n_3 \\ &\quad + \frac{d^2H}{dv'\,dw'}(m_2n_3 + n_2m_3) + \frac{d^2H}{dw'\,du'}(m_3n_1 + n_3m_1) \\ &\quad + \frac{d^2H}{du'\,dv'}(m_1n_2 + n_1m_2), \end{aligned}\right.$$

et par cette substitution, les formules (b) se changeront en d'autres que nous appellerons (B).

Indiquons ensuite le calcul semblable pour les équations (a), et posons les formules symboliques

$$\left\{\begin{aligned} u'^2 &= m_1^2u^2 + n_1^2v^2 + p_1^2w^2 + n_1p_1(2vw) + p_1m_1(2wu) + m_1n_1(2uv), \\ v'^2 &= m_2^2u^2 + n_2^2v^2 + p_2^2w^2 + n_2p_2(2vw) + p_2m_2(2wu) + m_2n_2(2uv), \\ w'^2 &= m_3^2u^2 + n_3^2v^2 + p_3^2w^2 + n_3p_3(2vw) + p_3m_3(2wu) + m_3n_3(2uv), \\ 2u'v' &= 2m_1m_2u^2 + 2n_1n_2v^2 + 2p_1p_2w^2 + (n_1p_2 + n_2p_1)(2vw) \\ &\quad + (p_1m_2 + p_2m_1)(2wu) + (m_1n_2 + m_2n_1)(2uv), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Nous avons d'autre part

$$\frac{d\Theta}{d(u^2)} = \frac{d\Theta}{d(u'^2)}\frac{d(u'^2)}{d(u^2)} + \frac{d\Theta}{d(v'^2)}\frac{d(v'^2)}{d(u^2)} + \frac{d\Theta}{d(w'^2)}\frac{d(w'^2)}{d(u^2)}$$
$$+ \frac{d\Theta}{d(2v'w')}\frac{d(2v'w')}{d(u^2)} + \frac{d\Theta}{d(2w'u')}\frac{d(2w'u')}{d(u^2)} + \frac{d\Theta}{d(2u'v')}\frac{d(2u'v')}{d(u^2)},$$

et nous en concluons la première des formules qui suivent, et les autres de même :

$$(e)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\Theta}{d(u^2)} = \frac{d\Theta}{d(u'^2)} m_1^2 + \frac{d\Theta}{d(v'^2)} m_2^2 + \frac{d\Theta}{d(w'^2)} m_3^2 + 2\frac{d\Theta}{d(2v'w')} m_2 m_3 \\
&\qquad + 2\frac{d\Theta}{d(2w'u')} m_3 m_1 + 2\frac{d\Theta}{d(2u'v')} m_1 m_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{d\Theta}{d(2uv)} = \frac{d\Theta}{d(u'^2)} m_1 n_1 + \frac{d\Theta}{d(v'^2)} m_2 n_2 + \frac{d\Theta}{d(w'^2)} m_3 n_3 \\
&\qquad + \frac{d\Theta}{d(2v'w')}(m_2 n_3 + n_2 m_3) + \frac{d\Theta}{d(2w'u')}(m_3 n_1 + n_3 m_1) \\
&\qquad + \frac{d\Theta}{d(2u'v')}(m_1 n_2 + n_1 m_2).
\end{aligned}\right.$$

En substituant les expressions (c) et (e) dans les équations (a), nous en obtiendrons d'autres que nous désignerons par (A), et qui offrent des calculs identiques à ceux des équations (B). Or, les équations (b) sont de la forme de celles qui représentent le mouvement vibratoire d'un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent mutuellement, suivant une fonction de la distance, et il résulte de cette signification physique, qu'en combinant les équations (B), on pourra obtenir celles-ci :

$$\frac{d^2\mathrm{H}}{du'^2}\xi' + \frac{d^2\mathrm{H}}{du'\,dv'}\eta' + \frac{d^2\mathrm{H}}{du'\,dw'}\zeta' = \frac{d^2\xi'}{dt^2}, \ldots,$$

donc, en combinant de la même manière les équations (A), on aura

$$\frac{d\Theta}{d(u'^2)}\xi' + \frac{d\Theta}{d(2u'v')}\eta' + \frac{d\Theta}{d(2u'w')}\zeta' = \frac{d^2\xi'}{dt^2}, \ldots,$$

et c'est ce que nous voulions démontrer.

Nous aurions pu effectuer les calculs que nous n'avons fait qu'indiquer, et donner ainsi une démonstration purement algébrique de la proposition précédente; mais nous l'omettons, parce qu'elle n'est pas nécessaire à notre objet.

3. Il est fort remarquable que, dans le cas où H ne renferme que des termes des ordres pairs, et par conséquent les équations (b) elles-mêmes que des dérivées de ces ordres, le système des formules (b) soit un cas particulier des formules (a).

Malgré l'importance de ce point, comme une démonstration s'en présentera presque d'elle-même dans la suite de nos idées, nous ne ferons ici qu'indiquer la suivante.

Il s'agit de démontrer que, étant donnée la fonction paire H de u, v, w, on peut toujours former une fonction Θ des six symboles u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2wu$, $2uv$, telle que l'on ait

$$(f)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Theta}{d(u^2)} = \dfrac{d^2 H}{du^2}, \quad \dfrac{d\Theta}{d(v^2)} = \dfrac{d^2 H}{dv^2}, \quad \dfrac{d\Theta}{d(w^2)} = \dfrac{d^2 H}{dw^2}, \quad \dfrac{d\Theta}{d(2vw)} = \dfrac{d^2 H}{dv\,dw}, \\ \dfrac{d\Theta}{d(2wu)} = \dfrac{d^2 H}{dw\,du}, \quad \dfrac{d\Theta}{d(2uv)} = \dfrac{d^2 H}{du\,dv}. \end{cases}$$

H est la somme de termes tels que $Au^k v^l w^p$, $k+l+p$ étant un nombre pair, il suffit donc de prouver qu'en prenant

$$H = Au^k v^l w^p, \quad k+l+p = 2n,$$

il est possible de déterminer une fonction Θ qui satisfasse aux conditions (f) : il n'existe pas qu'une fonction qui puisse convenir, mais on obtient une solution en posant

$$\Theta = AM \sum \frac{1}{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times 1.2\ldots\gamma \times 1.2\ldots\delta \times 1.2\ldots\varepsilon \times 1.2\ldots\eta}$$
$$\times (u^2)^\alpha (v^2)^\beta (w^2)^\gamma (2vw)^\delta (2wu)^\varepsilon (2uv)^\eta,$$
$$M = \frac{1.2\ldots k \times 1.2\ldots l \times 1.2\ldots p}{2^{n-1}\, 1.3.5\ldots(2n-3)};$$

le signe $\sum$ désigne une sommation qui s'étend à toutes les expres-

sions $(u^2)^\alpha(v^2)^\beta\ldots(2uv)^\eta$, susceptibles, après la suppression du symbole, de se réduire à la forme $2^i u^k v^l w^p$.

Pour plus de clarté, prenons un exemple, et posons

$$H = uv^2 w^3,$$

nous aurons à faire

$$k = 1,\quad l = 2,\quad p = 3,\quad n = 3,\quad M = 1,$$

ce qui donne pour l'expression de Θ

$$\Theta = v^2 . w^2 . 2uw + w^2 . 2vw . 2uv + \frac{1}{2}(2vw)^2 2wu,$$

et nous obtenons d'une part

$$\frac{d^2H}{du^2} = 0,\qquad \frac{d^2H}{dv^2} = 2uw^3,\qquad \frac{d^2H}{dw^2} = 6uv^2 w,$$

$$\frac{d^2H}{dv\,dw} = 6uvw^2,\quad \frac{d^2H}{dw\,du} = 3v^2 w^2,\quad \frac{d^2H}{du\,dv} = 2vw^3,$$

et de l'autre

$$\frac{d\Theta}{d(u^2)} = 0,\quad \frac{d\Theta}{d(v^2)} = w^2 . 2uw,\quad \frac{d\Theta}{d(w^2)} = v^2 . 2uw + 2vw . 2uv = 6uv^2 w$$

$$\frac{d\Theta}{d(2vw)} = w^2 . 2uv + 2vw . 2wu = 6uvw^2,$$

$$\frac{d\Theta}{d(2wu)} = v^2 . w^2 + \frac{1}{2}(2vw)^2 = 3v^2 w^2,$$

$$\frac{d\Theta}{d(2uv)} = w^2 . 2vw = 2vw^3.$$

On reconnaît que ces six expressions sont identiques aux précédentes.

4. Cherchons maintenant quelle forme particulière on doit donner à la fonction symbolique Θ, pour que les équations (a) du n° 1 représentent un mouvement vibratoire, sans changement de densité du milieu dans lequel il s'opère. Multiplions ces trois équations respectivement par u, v, w, en entendant par là, puisque u, v, w désignent les

signes de différentiation $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$, que nous les différentions par rapport à x, y, z, puis ajoutons, après avoir remarqué que

$$u\xi + v\eta + w\zeta$$

représente la dilatation υ du volume au point (x, y, z), et nous aurons

$$(g)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\upsilon}{dt^2} = &\left[\frac{d\Theta}{d(u^2)}u + \frac{d\Theta}{d(2uv)}v + \frac{d\Theta}{d(2uw)}\right]\xi \\ &+ \left[\frac{d\Theta}{d(2uv)}u + \frac{d\Theta}{d(v^2)}v + \frac{d\Theta}{d(2vw)}w\right]\eta \\ &+ \left[\frac{d\Theta}{d(2uw)}u + \frac{d\Theta}{d(2vw)}v + \frac{d\Theta}{d(w^2)}w\right]\zeta. \end{aligned}\right.$$

Donc le mouvement vibratoire s'effectuera nécessairement sans changement de densité, si on a

$$(h)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\Theta}{d(u^2)}u + \frac{d\Theta}{d(2uv)}v + \frac{d\Theta}{d(2uw)}w = 0, \\ &\frac{d\Theta}{(d2uv)}u + \frac{d\Theta}{d(v^2)}v + \frac{d\Theta}{d(2vw)}w = 0, \\ &\frac{d\Theta}{d(2uw)}u + \frac{d\Theta}{d(2vw)}v + \frac{d\Theta}{d(w^2)}w = 0. \end{aligned}\right.$$

Si au lieu des relations (h), on a celles-ci,

$$(i)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\Theta}{d(u^2)}u + \frac{d\Theta}{d(2uv)}v + \frac{d\Theta}{d(2uw)}w = u\varphi(u^2 + v^2 + w^2), \\ &\frac{d\Theta}{d(2uv)}u + \frac{d\Theta}{d(v^2)}v + \frac{d\Theta}{d(2vw)}w = v\varphi(u^2 + v^2 + w^2), \\ &\frac{d\Theta}{d(2uw)}u + \frac{d\Theta}{d(2vw)}v + \frac{d\Theta}{d(w^2)}w = w\varphi(u^2 + v^2 + w^2), \end{aligned}\right.$$

qui équivalent aux précédentes, au cas où $\varphi(u^2 + v^2 + w^2)$ est nul, l'équation (g) devient

$$\frac{d^2\upsilon}{dt^2} = \varphi(u^2 + v^2 + w^2)\,\upsilon.$$

D'après cela, cherchons quelle forme on doit donner à Θ pour satis-

faire aux conditions (h), ou pour plus de généralité, pour satisfaire aux conditions (i).

Posons

$$\Theta = \theta + \theta' + \theta'' + \ldots,$$

$\theta, \theta', \theta'', \ldots$ étant des fonctions homogènes de $u^2, v^2, w^2, \ldots, 2uv$ des degrés $n, n', n'', \ldots$, et rappelons-nous cette propriété des fonctions homogènes, que si $f(r, s, t, \ldots)$ est une telle fonction du degré m, on a

$$\frac{df}{dr} r + \frac{df}{ds} s + \frac{df}{dt} t + \ldots = mf;$$

nous obtenons

$$\frac{d\Theta}{d(u^2)} u^2 + \frac{d\Theta}{d(v^2)} v^2 + \frac{d\Theta}{d(w^2)} w^2$$
$$+ \frac{d\Theta}{d(2vw)} 2vw + \frac{d\Theta}{d(2wu)} 2wu + \frac{d\Theta}{d(2uv)} 2uv = n\theta + n'\theta' + n''\theta'' + \ldots.$$

Si donc nous ajoutons les équations (h) ou (i) multipliées par u, v, w, il en résulte

$$n\theta + n'\theta' + n''\theta'' + \ldots = 0$$
$$\text{ou} \quad = \varphi(u^2 + v^2 + w^2)(u^2 + v^2 + w^2).$$

On conclut de là, qu'on a $\theta = 0$, $\theta' = 0, \ldots$, ou

$$\theta = a(u^2 + v^2 + w^2)^n, \quad \theta' = b(u^2 + v^2 + w^2)^{n'}, \ldots.$$

Donc si on a les équations (h) ou (i), en enlevant à Θ son caractère symbolique, il s'annulera ou se réduira à une fonction de $u^2 + v^2 + w^2$. *Réciproquement*, si après avoir enlevé à Θ son caractère symbolique, nous obtenons une expression dont tous les termes se détruisent, ou qui soit fonction de $u^2 + v^2 + w^2$ seulement, on a les équations (h) ou (i).

Supposons d'abord que tous les termes de Θ se détruisent par la suppression du symbolisme; alors Θ est la somme d'expressions telles que celle-ci

$$U = \sum a\,(u^2)^\alpha (v^2)^\beta (w^2)^\gamma (2vw)^\delta (2wu)^\varepsilon (2uv)^\eta,$$

qui est elle-même composée de plusieurs termes se réduisant à la forme $mu^k v^l w^p$, k, l, p restant les mêmes, et qui jouit de la même propriété que U, de sorte qu'on a

$$(k) \qquad \sum a 2^{\delta+\varepsilon+\eta} = 0.$$

Prenant les dérivées de U, on a

$$\frac{dU}{d(u^2)} = \sum a\alpha (u^2)^{\alpha-1}(v^2)^{\beta}\ldots(2uv)^{\eta} = u^{k-2}v^l w^p \sum a\alpha 2^{\delta+\varepsilon+\eta},$$
$$\frac{dU}{d(2uv)} = \sum a\eta (u^2)^{\alpha}(v^2)^{\beta}\ldots(2uv)^{\eta-1} = \frac{1}{2}u^{k-1}v^{l-1}w^p \sum a\eta 2^{\delta+\varepsilon+\eta},$$
$$\frac{dU}{d(2uw)} = \sum a\varepsilon (u^2)^{\alpha}\ldots(2wu)^{\varepsilon-1}(2uv)^{\eta} = \frac{1}{2}u^{k-1}v^l w^{p-1} \sum a\varepsilon 2^{\delta+\varepsilon+\eta},$$

et si on les porte dans l'expression

$$\frac{dU}{d(u^2)}u + \frac{dU}{d(2uv)}v + \frac{dU}{d(2uw)}w,$$

elle se réduit à

$$u^{k-1}v^l w^p \sum a\left(\alpha + \frac{\eta}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)2^{\delta+\varepsilon+\eta},$$

ou à

$$\frac{k}{2}u^{k-1}v^l w^p \sum a 2^{\delta+\varepsilon+\eta},$$

car on a $2\alpha + \eta + \varepsilon = k$, et cette dernière expression étant nulle d'après (k), on a

$$\frac{dU}{d(u^2)}u + \frac{dU}{d(2uv)}v + \frac{dU}{d(2uw)}w = 0;$$

Θ étant une somme d'expressions semblables à U, on a la première formule (h); et par un changement de lettres, on a les deux autres.

Si après la suppression du symbolisme, Θ est une fonction de $u^2 + v^2 + w^2$, il peut être considéré comme étant la somme d'expressions telles que U, et d'autres telles que

$$V = a(u^2 + v^2 + w^2)^n = a[(u^2)^n + n(u^2)^{n-1}v^2 + \ldots];$$

on a

$$\frac{dV}{d(u^2)} = na(u^2 + v^2 + w^2)^{n-1}, \quad \frac{dV}{d(2uv)} = 0, \quad \frac{dV}{d(2uw)} = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{d\mathrm{V}}{d(u^2)}u + \frac{d\mathrm{V}}{d(2uv)}v + \frac{d\mathrm{V}}{d(2uw)}w = na(u^2 + v^2 + w^2)^{n-1}u;$$

on en conclut facilement la première formule (i), et de même les deux autres.

5. Appliquons maintenant les considérations précédentes à l'étude de la propagation du mouvement dans l'éther, qui est renfermé dans les corps cristallisés.

Le mouvement de l'éther étant considéré comme représenté par les équations (a), et de plus comme s'effectuant sans changement de densité, on aura les équations (h) du numéro précédent, et tous les termes de Θ se détruiront, dès qu'on lui enlèvera son caractère symbolique.

Cependant, faisons une généralisation qui ne compliquera rien, et remplaçons les conditions (h) par les conditions (i), qui les renferment: alors si on ôte à Θ son caractère symbolique, il se réduira à une fonction de $u^2 + v^2 + w^2$.

Supposons ensuite que le mouvement soit simple et donné par les formules

$$(l)\quad \left\{ \begin{aligned} &\xi = \mathrm{A}\cos(ux + vy + wz - st), \quad \eta = \mathrm{B}\cos(ux + vy + wz - st), \\ &\qquad\qquad \zeta = \mathrm{C}\cos(ux + vy + wz - st); \end{aligned} \right.$$

$\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}$ seront égaux à $-s^2\xi$, $-s^2\eta$, $-s^2\zeta$; dès lors ne regardons plus dans les équations (a) u, v, w comme des signes de différentiation, mais comme des quantités, savoir celles qui sont écrites dans les formules (l), et nous aurons, en changeant tous les signes, les trois équations

$$(m)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\Theta}{d(u^2)}\xi + \frac{d\Theta}{d(2uv)}\eta + \frac{d\Theta}{d(2uw)}\zeta = s^2\xi, \\ &\frac{d\Theta}{d(2uv)}\xi + \frac{d\Theta}{d(v^2)}\eta + \frac{d\Theta}{d(2vw)}\zeta = s^2\eta, \\ &\frac{d\Theta}{d(2uw)}\xi + \frac{d\Theta}{d(2vw)}\eta + \frac{d\Theta}{d(w^2)}\zeta = s^2\zeta. \end{aligned} \right.$$

Si on élimine ξ, η, ζ entre ces trois formules, on obtient l'équation caractéristique

$$(n) \qquad F(u, v, w, s) = 0,$$

qui est du troisième degré en s^2. Lorsqu'on limite Θ aux termes du second degré en u^2, v^2,..., $2uv$, cette équation se réduit à l'équation homogène par rapport à u, v, w, s

$$(p) \begin{cases} [s^2 - \alpha(u^2 + v^2 + w^2)]\{s^4 - [(b+c)u^2 + (c+a)v^2 + (a+b)w^2]s^2 \\ \qquad + (bcu^2 + cav^2 + abw^2)(u^2 + v^2 + w^2)\} = 0 \end{cases}$$

du n° 6 de la première partie, si l'on choisit les axes coordonnés, et elle permet de déterminer les trois vitesses $\frac{s}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$, avec lesquelles peut se propager une onde plane parallèle au plan $ux + vy + wz = 0$; si au contraire Θ renferme des termes d'ordres supérieurs au quatrième, l'équation (p) ne donne plus qu'approximativement ces trois vitesses, et l'équation (n) renferme outre les termes de l'équation (p) d'autres de degrés plus élevés; toutefois, il est essentiel de remarquer que, d'après la forme des équations (m), les trois vibrations correspondantes à ces trois ondes planes parallèles resteront rectangulaires.

Or, d'après les formules (i), les équations (m) sont satisfaites par

$$\frac{\xi}{u} = \frac{\eta}{v} = \frac{\zeta}{w}, \quad s^2 - \varphi(u^2 + v^2 + w^2) = 0;$$

donc, pour l'une des ondes planes, la vibration est normale à cette onde, et, d'après la position relative des trois vibrations, les deux autres sont transversales, c'est-à-dire situées dans l'onde, et on a pour elles

$$u\xi + v\eta + w\zeta = 0.$$

Si au lieu des formules (i) on a les formules (h), il faut faire

$$\varphi(u^2 + v^2 + w^2) = 0;$$

la première onde plane disparaît, les deux autres restent les mêmes.

Proposons-nous enfin de trouver la *surface de l'onde*, qui est l'enveloppe du plan

$$(r) \qquad ux + vy + wz = s$$

(1re partie, n° 2); pour l'obtenir, il faut éliminer u, v, w entre les équations (n), (r) et

$$(q) \qquad \frac{x}{\frac{dF}{du}} = \frac{y}{\frac{dF}{dv}} = \frac{z}{\frac{dF}{dw}},$$

et on arrivera de la sorte à l'équation

$$(t) \qquad \mathfrak{F}(x, y, z, s) = 0.$$

Au lieu d'appliquer cette méthode sur l'équation (n), on peut le faire sur les deux équations en lesquelles elle se décompose,

$$s^2 - \varphi(u^2 + v^2 + w^2) = 0, \quad \psi(u, v, w, s) = 0.$$

De la première on conclut une onde sphérique représentée par

$$s^2 - \varphi\left(\frac{s^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right) = 0,$$

sur laquelle la vibration est longitudinale, et qui disparaît si

$$\varphi(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

De la seconde équation on conclut une onde pour laquelle la vibration est située dans le plan tangent (r), ou, si l'on veut, sur l'onde même.

Quand l'équation (n) est homogène, s s'élimine en même temps que u, v, w entre les équations (n), (r), (q), de sorte que l'équation (t) de l'onde est indépendante de cette quantité; c'est ce qui a lieu quand on néglige la dispersion. Mais quand on y a égard, l'équation (n) cesse d'être homogène, et l'équation (t) contient s; d'ailleurs, si on désigne par T la durée de la vibration, on a

$$T = \frac{2\pi}{s},$$

comme on le voit d'après les formules (l). Observons ensuite que, tandis que dans l'acoustique la durée de la vibration constitue la hauteur du son, dans la lumière elle produit la couleur, et tout le monde sait que par la réflexion ou la réfraction la hauteur du son et la couleur d'un rayon simple ne changent pas.

D'après cela, donnons dans l'équation (t) une valeur déterminée à s, nous avons la surface d'onde sur laquelle se trouve la lumière d'une même couleur. Quand un rayon de lumière simple passe de l'air dans un cristal, la durée de sa vibration ou sa couleur ne change pas; or, la vitesse dans l'air étant la même pour les différentes couleurs, et étant mesurée par le rapport de la longueur d'ondulation à la durée de la vibration, il s'ensuit que la longueur d'ondulation dans l'air est en raison inverse de la durée de la vibration, et que dans l'équation (t) on pourra introduire au lieu de s la longueur d'ondulation dans l'air de la couleur considérée. La surface de l'onde ainsi définie servira donc à déterminer la position des rayons réfractés d'une certaine couleur, absolument de la même manière que la surface de l'onde est en général employée à trouver la réfraction d'un rayon incident de lumière blanche, dont on néglige la dispersion.

Quand on tient compte de la dispersion, on n'a plus rigoureusement pour surface d'onde la surface donnée par Fresnel, mais on a différentes surfaces d'onde variables avec la couleur et très-rapprochées de celle-là, et, d'après ce que nous avons vu, les vibrations lumineuses se font rigoureusement dans les surfaces d'onde qui leur sont propres.

6. Il est fort intéressant de connaître quelles actions mutuelles on peut imaginer entre les molécules d'un système, pour que le mouvement vibratoire de ce système soit représenté par les équations

$$(m)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\Theta}{d(u^2)}\,\xi + \frac{d\Theta}{d(2uv)}\,\eta + \frac{d\Theta}{d(2uw)}\,\zeta = s^2\xi,\\
&\frac{d\Theta}{d(2uv)}\,\xi + \frac{d\Theta}{d(v^2)}\,\eta + \frac{d\Theta}{d(2vw)}\,\zeta = s^2\eta,\\
&\frac{d\Theta}{d(2uw)}\,\xi + \frac{d\Theta}{d(2vw)}\,\eta + \frac{d\Theta}{d(w^2)}\,\zeta = s^2\zeta;
\end{aligned}\right.$$

nous allons donc montrer une action que l'on peut concevoir entre

deux molécules, pour que ces équations en soient une conséquence, étant d'ailleurs bien loin de prétendre avoir trouvé le dernier mot de cette question; au reste, la recherche que nous allons présenter est encore utile, en ce qu'elle sert à démontrer que nos équations renferment celles de Cauchy comme cas particulier.

Désignons par μ une molécule dont les coordonnées sont $a+\xi$, $b+\eta$, $c+\zeta$, a, b, c étant des constantes, et soient m, m',... les molécules environnantes, puis posons

$$\Theta = \mathrm{Sm}\psi\,(g_1 \mathrm{R}^2 + g_2 \mathrm{R}^3 + g_3 \mathrm{R}^4 + \ldots),$$
$$\mathrm{R} = l(u^2) + m(v^2) + n(w^2) + p(2vw) + q(2wu) + r(2uv),$$

le signe S étant un signe intégral, s'étendant à toutes les molécules m, m',..., de sorte que ψ, quantité indépendante du choix des axes coordonnés, la fonction symbolique R, et même les coefficients g_1, g_2,..., peuvent être supposés variables, quand on passe d'une des molécules m, m',... à l'autre.

Posons ensuite

$$2g_1 \mathrm{R} + 3g_2 \mathrm{R}^2 + \ldots = \Lambda,$$

et nous aurons

$$\frac{d\Theta}{d(u^2)} = \mathrm{Sm}\psi l\Lambda, \quad \frac{d\Theta}{d(v^2)} = \mathrm{Sm}\psi m\Lambda, \quad \frac{d\Theta}{d(w^2)} = \mathrm{Sm}\psi n\Lambda,$$
$$\frac{d\Theta}{d(2vw)} = \mathrm{Sm}\psi p\Lambda, \quad \frac{d\Theta}{d(2wu)} = \mathrm{Sm}\psi q\Lambda, \quad \frac{d\Theta}{d(2uv)} = \mathrm{Sm}\psi r\Lambda;$$

les équations (m) deviennent donc

$$(n) \qquad \begin{cases} \mathrm{Sm}\psi\Lambda\,(l\xi + r\eta + q\zeta) = s^2\xi, \\ \mathrm{Sm}\psi\Lambda\,(r\xi + m\eta + p\zeta) = s^2\eta, \\ \mathrm{Sm}\psi\Lambda\,(q\xi + p\eta + n\zeta) = s^2\zeta. \end{cases}$$

Si l'on change de coordonnées, ces équations deviennent

$$(n') \qquad \mathrm{Sm}\psi\Lambda'\,(l'\xi' + r'\eta' + q'\zeta') = s^2\xi', \ldots,$$

en posant

$$\mathrm{R} = l'(u'^2) + m'(v'^2) + n'(w'^2) + p'(2v'w') + q'(2w'u') + r'(2u'v'),$$
$$\Lambda' = 2g_1 \mathrm{R}' + 3g_2 \mathrm{R}'^2 + \ldots,$$

et l', m', n', p', q', r' sont déterminés par l'équation

$$(v)\quad \left\{\begin{aligned} &l'u'^2 + m'v'^2 + n'w'^2 + 2p'v'w' + 2q'w'u' + 2r'u'v' \\ &\quad = lu^2 + mv^2 + nw^2 + 2pvw + 2qwu + 2ruv. \end{aligned}\right.$$

Pour le démontrer, rappelons-nous les formules du n° **2**, par lesquelles on calcule $\frac{d\Theta}{d(u'^2)}, \frac{d\Theta}{d(v'^2)}, \ldots, \frac{d\Theta}{d(2u'v')}$ au moyen de $\frac{d\Theta}{d(u^2)}, \frac{d\Theta}{d(v^2)}, \ldots$; on en conclut facilement que des formules (u) on peut déduire les formules (u'), si l'on a les six égalités

$$(w)\quad \left\{\begin{aligned} l'\Lambda' &= \Lambda(lm_1^2 + mm_2^2 + nm_3^2 + 2pm_2m_3 + 2qm_3m_1 + 2rm_1m_2), \\ m'\Lambda' &= \Lambda(ln_1^2 + mn_2^2 + nn_3^2 + 2pn_2n_3 + 2qn_3n_1 + 2rn_1n_2), \\ n'\Lambda' &= \Lambda(lp_1^2 + mp_2^2 + np_3^2 + 2pp_2p_3 + 2qp_3p_1 + 2rp_3p_2), \\ p'\Lambda' &= \Lambda[lp_1m_1 + mp_2m_2 + np_3m_3 + p(p_2m_3 + m_2p_3) \\ &\qquad + q(p_3m_1 + m_3p_1) + r(p_1m_2 + m_1p_2)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Si dans les égalités (w) on supprime les facteurs Λ et Λ', on a six autres égalités, desquelles on déduit l'équation (v) et aussi $R = R'$, $\Lambda = \Lambda'$; donc les égalités (w) sont satisfaites, en même temps que (v).

Il résulte de là qu'on peut écrire les équations (m) sous la forme (u) et que l'équation

$$(x)\qquad lu^2 + mv^2 + nw^2 + 2pvw + 2qwu + 2ruv = 1,$$

où u, v, w sont pris pour désigner des coordonnées rectilignes, est celle d'une surface du second degré à centre, propre à définir l'action qui s'exerce entre les deux molécules μ et m.

Les équations qui donnent le mouvement d'un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent mutuellement, suivant une fonction de la distance, peuvent s'écrire, dans le cas où elles ne renferment que des termes d'ordre pair, sous la forme

$$(y)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}m\psi\mathrm{P}(\mathrm{x}^2\xi + \mathrm{xy}\eta + \mathrm{xz}\zeta) = s^2\xi, \\ &\mathrm{S}m\psi\mathrm{P}(\mathrm{xy}\xi + \mathrm{y}^2\eta + \mathrm{yz}\zeta) = s^2\eta, \\ &\mathrm{S}m\psi\mathrm{P}(\mathrm{xz}\xi + \mathrm{yz}\eta + \mathrm{z}^2\zeta) = s^2\zeta \end{aligned}\right.$$

(voir *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. I[er]), en posant

$$P = \frac{N}{1.2} + \frac{N^2}{1.2.3.4} + \frac{N^3}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$N = x^2 u^2 + y^2 v^2 + z^2 w^2 + 2yzvw + 2zxwu + 2xyuv.$$

On voit donc que des équations (u) on déduit comme cas particulier les équations (y); il suffit en effet de poser

$$l = x^2, \quad m = y^2, \quad n = z^2, \quad p = yz, \quad q = zx, \quad r = xy,$$

$$2g_1 = \frac{1}{1.2}, \quad 3g_2 = \frac{1}{1.2.3.4}, \ldots,$$

d'où l'on conclut

$$R = N, \quad \Lambda = P.$$

Les équations (u) et (y) sont identiques aux équations que nous avons écrites sous les formes (a) et (b) aux n^{os} **1** et **2**, et la proposition dont il a été question au n° **3** se trouve démontrée.

Il résulte encore de ce qui précède que pour que nos équations se réduisent à celles de Cauchy, il faut et il suffit que la surface à centre du second degré (x) se réduise à deux plans parallèles dont l'équation soit

$$(xu + yv + zw)^2 = 1,$$

u, v, w étant les coordonnées variables.

Revenons au système de molécules auquel les équations (u) conviennent. Si nous considérons séparément l'action de la molécule m sur la molécule μ, nous aurons pour les trois composantes de cette action

$$m\psi\Lambda(l\xi + r\eta + q\zeta),$$

$$m\psi\Lambda(r\xi + m\eta + p\zeta),$$

$$m\psi\Lambda(q\xi + p\eta + n\zeta),$$

en posant

$$\Lambda = 2g_1 R + 3g_2 R^2 + \ldots.$$

Si nous choisissons pour axes de coordonnées les axes de symétrie

de la surface (x), p, q, r seront nuls, et les trois composantes de l'action se réduiront à

$$(z)\qquad \mathrm{m}\psi\Lambda l\xi,\quad \mathrm{m}\psi\Lambda m\eta,\quad \mathrm{m}\psi\Lambda n\zeta,$$

et l'équation de la surface (x) à

$$lu^2 + mv^2 + nw^2 = 1.$$

Considérons la surface à centre du second degré

$$(\alpha)\qquad \frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = 1,$$

qui est réciproque de la précédente, l'origine des coordonnées x, y, z passant par la molécule μ; l'expression

$$\mathrm{R} = lu^2 + mv^2 + nw^2$$

représente le carré de la distance δ de la molécule μ au plan tangent à l'ellipsoïde (α), mené parallèlement au plan

$$ux + vy + wz = 0;$$

donc Λ représente une fonction paire quelconque de δ, qui ne renferme pas de termes indépendants de δ; et les trois composantes de l'action sont proportionnelles à une même fonction paire de δ, à la composante parallèle de la vibration et à l'axe correspondant de la surface (α). Deux des trois quantités l, m, n sont nulles, si l'action qui s'exerce entre deux molécules est une fonction de la distance.

En retournant ce calcul, on démontrera que réciproquement, si pour trois axes coordonnés rectangulaires choisis convenablement, et variables d'une des molécules m, m',... à l'autre, l'action élémentaire est formée de trois composantes représentées par les expressions (z), le mouvement vibratoire est donné par les équations (u) ou (m).

TROISIÈME PARTIE.

1. Les équations (a) du n° 1 de la deuxième partie donnent le mode de propagation du mouvement dans l'éther renfermé dans les corps cristallisés, si Θ s'annule, lorsqu'on lui enlève son caractère symbolique.

(Si l'on supposait que Θ se réduisît à une fonction de $u^2+v^2+w^2$, on trouverait la même onde et, en plus, une onde sphérique sur laquelle la vibration serait normale.)

Si l'on réduit Θ aux termes du deuxième et du troisième ordre en u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2wu$, $2uv$, et qu'on suppose le mouvement simple, les équations citées deviendront

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[L_1+\frac{dU}{d(u^2)}\right]\xi+\left[M_1+\frac{dU}{d(2uv)}\right]\eta+\left[P_1+\frac{dU}{d(2uw)}\right]\zeta=s^2\xi,\\ &\left[M_1+\frac{dU}{d(2uv)}\right]\xi+\left[M_2+\frac{dU}{d(v^2)}\right]\eta+\left[P_2+\frac{dU}{d(2vw)}\right]\zeta=s^2\eta,\\ &\left[P_1+\frac{dU}{d(2uw)}\right]\xi+\left[P_2+\frac{dU}{d(2vw)}\right]\eta+\left[P_3+\frac{dU}{d(w^2)}\right]\zeta=s^2\zeta, \end{aligned}\right.$$

L_1, M_1,... ayant les valeurs (D) du n° 6 de la première partie, dans la supposition de $\alpha=0$, et comme nous savons, si on choisit les axes de coordonnées, on pourra supposer d, e, f nuls, et il restera

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &L_1=cv^2+bw^2, && M_2=cu^2+aw^2, && P_3=bu^2+av^2,\\ &P_2=-avw, && P_1=-buw, && M_1=-cuv. \end{aligned}\right.$$

Quant à U, c'est une fonction du troisième degré des six symboles u^2, v^2,..., $2uv$, et nous écrirons d'abord pour la représenter la forme la plus générale du troisième degré de ces symboles :

$$\begin{aligned} U=\;&\mathcal{A}_1(u^2)^3+\mathcal{B}_1(u^2)^2\,2uv+\mathcal{C}_1(u^2)^2v^2+\mathcal{D}_1(2uv)^2u^2\\ &+B_1(u^2)^2\,2uw+C_1(u^2)^2w^2+D_1(2uw)^2u^2\\ &+\mathcal{E}_1(u^2)^2\,2vw+\mathcal{F}_1u^2.2uv.2wu+\mathcal{G}_1u^2.v^2.2uv\\ &+\mathcal{H}_1(2uv)^3+\mathcal{K}_1(2uv)^2.2uw \end{aligned}$$

$$+ \mathcal{L}_1 u^2 . v^2 . 2uw + \mathcal{M}_1 u^2 . 2uv . 2vw + \mathrm{K}_1 (2uw)^2 . 2uv$$
$$+ \mathrm{L}_1 u^2 . w^2 . 2uv + \mathrm{M}_1 u^2 . 2uw . 2vw + \mathcal{Q}_1 u^2 . (2vw)^2$$
$$+ \mathcal{A}_2 (v^2)^3 + \mathcal{B}_2 (v^2)^2 . 2vw + \mathcal{C}_2 (v^2)^2 w^2 + \mathcal{D}_2 (2vw)^2 v^2$$
$$+ \mathrm{B}_2 (v^2)^2 2vu + \mathrm{C}_2 (v^2)^2 u^2 + \mathrm{D}_2 (2vu)^2 v^2$$
$$+ \mathcal{E}_2 (v^2)^2 2wu + \mathcal{F}_2 v^2 . 2vw . 2uv + \mathcal{G}_2 v^2 . w^2 . 2vw$$
$$+ \mathcal{H}_2 (2vw)^3 + \mathcal{K}_2 (2vw)^2 2vu$$
$$+ \mathcal{L}_2 v^2 . w^2 . 2vu + \mathcal{M}_2 v^2 . 2vw . 2wu$$
$$+ \mathrm{K}_2 (2vu)^2 2vw + \mathrm{L}_2 v^2 . u^2 . 2vw + \mathrm{M}_2 v^2 . 2vu . 2wu + \mathcal{Q}_2 v^2 (2wu)^2$$
$$+ \mathcal{A}_3 (w^2)^3 + \mathcal{B}_3 (w^2)^2 2wu + \mathcal{C}_3 (w^2)^2 u^2 + \mathcal{D}_3 (2wu)^2 w^2$$
$$+ \mathrm{B}_3 (w^2)^2 2wv + \mathrm{C}_3 (w^2)^2 v^2 + \mathrm{D}_3 (2wv)^2 w^2$$
$$+ \mathcal{E}_3 (w^2)^2 2uv + \mathcal{F}_3 w^2 . 2wu . 2vw + \mathcal{G}_3 w^2 . u^2 . 2wu$$
$$+ \mathcal{H}_3 (2wu)^3 + \mathcal{K}_3 (2wu)^2 . 2wv$$
$$+ \mathcal{L}_3 w^2 . u^2 . 2wv + \mathcal{M}_3 w^2 . 2wu . 2uv$$
$$+ \mathrm{K}_3 (2wv)^2 2wu + \mathrm{L}_3 w^2 . v^2 . 2wu + \mathrm{M}_3 w^2 . 2wv . 2uv$$
$$+ \mathcal{Q}_3 w^2 (2uv)^2 + \mathcal{N} u^2 . v^2 . w^2 + \mathcal{P} 2uv . 2uw . 2vw .$$

Otant à U son caractère symbolique, nous aurons l'expression

$$\mathrm{Z} = \mathcal{A}_1 u^6 + \mathcal{A}_2 v^6 + \mathcal{A}_3 w^6 + 2\mathcal{B}_1 u^5 v + 2\mathcal{B}_2 v^5 w + 2\mathcal{B}_3 w^5 u$$
$$+ 2\mathrm{B}_1 u^5 w + 2\mathrm{B}_2 v^5 u + 2\mathrm{B}_3 w^5 v$$
$$+ (\mathcal{C}_1 + 4\mathcal{D}_1) u^4 v^2 + (\mathcal{C}_2 + 4\mathcal{D}_2) v^4 w^2 + (\mathcal{C}_3 + 4\mathcal{D}_3) w^4 u^2$$
$$+ (\mathrm{C}_1 + 4\mathrm{D}_1) u^4 w^2$$
$$+ (\mathrm{C}_2 + 4\mathrm{D}_2) v^4 u^2 + (\mathrm{C}_3 + 4\mathrm{D}_3) w^4 v^2 + (2\mathcal{E}_1 + 4\mathcal{F}_1) u^4 vw$$
$$+ (2\mathcal{E}_2 + 4\mathcal{F}_2) v^4 wu$$
$$+ (2\mathcal{E}_3 + 4\mathcal{F}_3) w^4 uv + (2\mathcal{G}_1 + 8\mathcal{H}_1) u^3 v^3$$
$$+ (2\mathcal{G}_2 + 8\mathcal{H}_2) v^3 w^3 + (2\mathcal{G}_3 + 8\mathcal{H}_3) w^3 u^3$$
$$+ (8\mathcal{K}_1 + 2\mathcal{L}_1 + 4\mathcal{M}_1) u^3 v^2 w + (8\mathcal{K}_2 + 2\mathcal{L}_2 + 4\mathcal{M}_2) v^3 w^2 u$$
$$+ (8\mathcal{K}_3 + 2\mathcal{L}_3 + 4\mathcal{M}_3) w^3 u^2 v$$
$$+ (8\mathrm{K}_1 + 2\mathrm{L}_1 + 4\mathrm{M}_1) u^3 w^2 v + (8\mathrm{K}_2 + 2\mathrm{L}_2 + 4\mathrm{M}_2) v^3 u^2 w$$
$$+ (8\mathrm{K}_3 + 2\mathrm{L}_3 + 4\mathrm{M}_3) w^3 v^2 u$$
$$+ (\mathcal{N} + 8\mathcal{P} + 4\mathcal{Q}_1 + 4\mathcal{Q}_2 + 4\mathcal{Q}_3) u^2 v^2 w^2 .$$

Tous les termes de Z doivent être nuls; on a donc

$$(\mathrm{B})\quad\left\{\begin{array}{l}
\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 = 0,\quad \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_3 = \mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2 = \mathrm{B}_3 = 0,\\
\mathcal{C}_1 = -4\mathcal{D}_1,\quad \mathcal{C}_2 = -4\mathcal{D}_2,\quad \mathcal{C}_3 = -4\mathcal{D}_3,\\
\mathrm{C}_1 = -4\mathrm{D}_1,\quad \mathrm{C}_2 = -4\mathrm{D}_2,\quad \mathrm{C}_3 = -4\mathrm{D}_3,\\
\mathcal{N} = 6\mathcal{A} - 8\mathcal{P} - 4\mathcal{Q}_1 - 4\mathcal{Q}_2 - 4\mathcal{Q}_3,\\
\mathcal{J}_1 = -2\mathcal{I}_1,\quad \mathcal{J}_2 = -2\mathcal{I}_2,\quad \mathcal{J}_3 = -2\mathcal{I}_3,\\
\mathcal{G}_1 = -4\mathcal{H}_1,\quad \mathcal{G}_2 = -4\mathcal{H}_2,\quad \mathcal{G}_3 = -4\mathcal{H}_3,\\
\mathcal{L}_1 = -4\mathcal{K}_1 - 2\mathcal{M}_1,\quad \mathcal{L}_2 = -4\mathcal{K}_2 - 2\mathcal{M}_2,\quad \mathcal{L}_3 = -4\mathcal{K}_3 - 2\mathcal{M}_3,\\
\mathrm{L}_1 = -4\mathrm{K}_1 - 2\mathrm{M}_1,\quad \mathrm{L}_2 = -4\mathrm{K}_2 - 2\mathrm{M}_2,\quad \mathrm{L}_3 = -4\mathrm{K}_3 - 2\mathrm{M}_3.
\end{array}\right.$$

Dans le cas où le cristal a trois plans de symétrie, qu'on prend pour plans de coordonnées, il est aisé de voir que si on imagine deux mouvements par ondes planes, parallèles aux plans

$$ux + vy + wz = 0 \quad \text{et} \quad -ux + vy + wz = 0,$$

η et ζ pourront être censés rester les mêmes, et ξ changer de signe.

Il suit de là que les équations (A) ne doivent pas changer, si on y remplace u par $-u$ et ξ par $-\xi$, et de même elles ne doivent pas changer, si on y remplace v par $-v$, η par $-\eta$, ou encore w par $-w$, ζ par $-\zeta$. Alors, avec un peu d'attention, on reconnaîtra que U ne doit conserver que des termes, qui, après la suppression du symbolisme, soient pairs en u, en v et en w.

Donc, pour un cristal dont toutes les molécules sont disposées symétriquement par rapport aux plans de coordonnées, on a encore

$$(\mathrm{C})\quad\left\{\begin{array}{llllll}
\mathcal{I}_1 = 0, & \mathcal{H}_1 = 0, & \mathcal{K}_1 = 0, & \mathcal{M}_1 = 0, & \mathrm{K}_1 = 0, & \mathrm{M}_1 = 0,\\
\mathcal{I}_2 = 0, & \mathcal{H}_2 = 0, & \mathcal{K}_2 = 0, & \mathcal{M}_2 = 0, & \mathrm{K}_2 = 0, & \mathrm{M}_2 = 0,\\
\mathcal{I}_3 = 0, & \mathcal{H}_3 = 0, & \mathcal{K}_3 = 0, & \mathcal{M}_3 = 0, & \mathrm{K}_3 = 0, & \mathrm{M}_3 = 0,
\end{array}\right.$$

et d'après les conditions (B) et (C), l'expression de U devient

$$\mathrm{U} = -4\mathcal{D}_1 (u^2)^2 v^2 + \mathcal{D}_1 (2uv)^2 u^2 - 4\mathrm{D}_1 (u^2)^2 w^2 + \mathrm{D}_1 (2uw)^2 u^2$$
$$+ \mathcal{Q}_1 u^2 . (2vw)^2 - 4\mathcal{D}_2 (v^2)^2 w^2$$

$$+ \mathfrak{D}_2 (2vw)^2 v^2 - 4 D_2 (v^2)^2 u^2 + D_2 (2vu)^2 v^2 + \mathfrak{L}_2 v^2 (2wu)^2$$
$$- 4 \mathfrak{D}_3 (w^2)^2 u^2 + \mathfrak{D}_3 (2wu)^2 w^2$$
$$- 4 D_3 (w^2)^2 v^2 + D_3 (2wv)^2 w^2 + \mathfrak{L}_3 w^2 (2uv)^2$$
$$- 4 (2 \mathfrak{P} + \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3) u^2 . v^2 . w^2$$
$$+ \mathfrak{P}\, 2uv . 2vw . 2wu.$$

On aura donc à substituer dans les équations (A) les expressions suivantes :

$$\frac{dU}{d(u^2)} = - 4 D_2 v^4 - 4 \mathfrak{D}_3 w^4 - 4 \mathfrak{D}_1 u^2 v^2 - 4 D_1 u^2 w^2 - 4 (2 \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3) v^2 w^2,$$

$$\frac{dU}{d(v^2)} = - 4 \mathfrak{D}_1 u^4 - 4 D_3 w^4 - 4 D_2 u^2 v^2 - 4 \mathfrak{D}_2 v^2 w^2 - 4 (2 \mathfrak{P} + \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3) w^2 u^2,$$

$$\frac{dU}{d(w^2)} = - 4 D_1 u^4 - 4 \mathfrak{D}_2 v^4 - 4 \mathfrak{D}_3 w^2 u^2 - 4 D_3 v^2 w^2 - 4 (2 \mathfrak{P} + \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2) u^2 v^2,$$

$$\frac{dU}{d(2vw)} = 4 \mathfrak{D}_2 v^3 w + 4 D_3 v w^3 + 4 (\mathfrak{P} + \mathfrak{L}_1) u^2 v w,$$

$$\frac{dU}{d(2uw)} = 4 D_1 u^3 w + 4 \mathfrak{D}_3 u w^3 + 4 (\mathfrak{P} + \mathfrak{L}_2) v^2 w u,$$

$$\frac{dU}{d(2uv)} = 4 \mathfrak{D}_1 u^3 v + 4 D_2 u v^3 + 4 (\mathfrak{P} + \mathfrak{L}_3) w^2 u v.$$

2. Supposons maintenant que l'on ait un cristal uniaxe, et que l'on prenne pour axe des z l'axe d'isotropie. La dernière expression de U doit subir de nouvelles réductions, et pour les obtenir, il suffirait d'exprimer comme au n° 5 de la première partie, que l'expression de U reste invariable quand on fait tourner l'angle droit des x et y dans son plan. Mais le calcul serait un peu long, et on peut arriver au même but de la manière suivante.

Pour que l'axe des z soit un axe d'isotropie, il faut que la nouvelle expression de U reste invariable par l'échange des deux lettres u et v, et il en résulte

$$(b) \qquad \mathfrak{D}_1 = D_2, \quad \mathfrak{D}_2 = D_1, \quad \mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2, \quad \mathfrak{D}_1 = D_3;$$

de même on doit faire dans les expressions (a)

$$(c) \qquad b = a;$$

alors les dérivées de U deviennent

$$\frac{dU}{d(u^2)} = -4D_2 v^4 - 4D_3 w^4 - 4D_2 u^2 v^2 - 4D_1 u^2 w^2 - 4(2\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_3) v^2 w^2,$$

$$\frac{dU}{d(v^2)} = -4D_2 u^4 - 4D_3 w^4 - 4D_2 u^2 v^2 - 4D_1 v^2 w^2 - 4(2\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_3) w^2 u^2,$$

$$\frac{dU}{d(w^2)} = -4D_1 u^4 - 4D_1 v^4 - 8(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1) u^2 v^2 - 4D_3 w^2 u^2 - 4D_3 v^2 w^2,$$

$$\frac{dU}{d(2vw)} = 4D_1 v^3 w + 4D_3 v w^3 + 4(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1) u^2 vw,$$

$$\frac{dU}{d(2uw)} = 4D_1 u^3 w + 4D_3 u w^3 + 4(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1) v^2 wu,$$

$$\frac{dU}{d(2uv)} = 4D_2 u^3 v + 4D_2 u v^3 + 4(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_3) w^2 uv.$$

Les conditions (b) et (c) ne sont pas les seules qui conviennent à un axe d'isotroprie pris pour axe des z; il faut encore y ajouter la relation

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1 = D_1,$$

qu'on obtiendrait par la méthode indiquée ci-dessus.

Toutefois cette condition n'est pas indispensable à connaître, si on remarque qu'il suffit d'étudier la manière dont se propage le mouvement dans un plan passant par l'axe des z, et pour obtenir cette simplification, il n'y a qu'à faire $v = 0$ dans les équations (A).

On aura donc à substituer dans les formules (A) les expressions

$$L_1 = aw^2,\ M_2 = cu^2 + aw^2,\ P_3 = au^2,\ P_2 = 0,\ P_1 = -auw,\ M_1 = 0,$$

$$\frac{dU}{d(u^2)} = aw^2 - 4D_3 w^4 - 4D_1 u^2 w^2,$$

$$\frac{dU}{d(v^2)} = cu^2 + aw^2 - 4D_2 u^4 - 4D_3 w^4 - 4(2\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_3) w^2 u^2;$$

$$\frac{dU}{d(w^2)} = au^2 - 4D_1u^4 - 4D_3w^2u^2,$$

$$\frac{dU}{d(2wv)} = 0, \quad \frac{dU}{d(2uw)} = -auw + 4D_1u^3w + 4D_3uw^3, \quad \frac{dU}{d(2uv)} = 0.$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$-4D_1 = A, \quad -4D_2 = B, \quad -4D_3 = C, \quad -2(2\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_3) = D,$$

et nous aurons enfin

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} (aw^2 + Aw^2u^2 + Cw^4 - s^2)\xi - (auw + Au^3w + Cuw^3)\zeta = 0, \\ (cu^2 + aw^2 + Bu^4 + 2Dw^2u^2 + Cw^4 - s^2)\eta = 0, \\ (au + Au^3 + Cuw^2)w\xi - [u(au + Au^3 + Cw^2u) - s^2]\zeta = 0. \end{array} \right.$$

On peut satisfaire à ces équations,

1° En posant $\xi = 0$, $\zeta = 0$,

$$(d) \qquad s^2 = cu^2 + aw^2 + Bu^4 + 2Du^2w^2 + Cw^4.$$

2° En posant $\eta = 0$,

$$(e) \qquad s^2 = (u^2 + w^2)(a + Au^2 + Cw^2),$$

cette dernière équation provenant de l'élimination de $\frac{\xi}{\zeta}$ entre les équations (D).

Nous savons par quels calculs on peut des deux équations caractéristiques (d) et (e) déduire deux surfaces d'onde; mais la détermination des équations de ces surfaces ne sera pas nécessaire pour calculer la dispersion.

Quand on néglige dans les équations (d) et (e) les termes du quatrième ordre en u et w, on a les deux ondes d'Huyghens, savoir une sphère et un ellipsoïde de révolution tangents sur l'axe.

Quand on a égard aux termes du quatrième ordre, on a pour ondes deux surfaces excessivement rapprochées de celles d'Huyghens, et variables d'une couleur à l'autre. Le rayon dit *ordinaire* ne serait donné par une onde parfaitement sphérique, qu'autant qu'on aurait $C = A$.

Si l'on fait $u = 0$, les équations (d) et (e) donnent l'une et l'autre

$$s^2 = aw^2 + Cw^4;$$

on en conclut que les deux vitesses de propagation suivant l'axe sont égales, et il en résulte cette propriété remarquable que les deux ondes sont encore tangentes sur l'axe.

3. Considérons d'abord le cas beaucoup plus simple où le corps est isotrope. Les ondes dont nous venons de parler sont alors toutes deux sphériques et par suite coïncident, et la vibration n'a plus de direction déterminée. On a

$$c = a, \quad A = B = C = D;$$

donc

$$s^2 = (u^2 + w^2)[a + A(u^2 + w^2)],$$

et si l'on pose

$$u^2 + w^2 = k^2,$$

on a

$$(f) \qquad \frac{s^2}{k^2} = a + Ak^2.$$

D'ailleurs le mouvement vibratoire étant donné par les équations

$$\xi = M\cos(ux + wz - st),$$
$$\eta = N\cos(ux + wz - st),$$
$$\zeta = P\cos(ux + wz - st),$$

$\frac{s}{k}$ représente la vitesse de propagation ω dans le corps considéré, et si l'on désigne par λ la longueur d'ondulation, on a

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Soient ω_0 et λ_0 les mêmes quantités pour l'air que ω et λ pour le corps.

Si l'on désigne par n l'indice de réfraction, on a

$$n = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\lambda_0}{\lambda};$$

d'où

$$\frac{s}{k} = \omega = \frac{\omega_0}{n}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{\lambda_0},$$

et à cause de (f), on a

$$\frac{\omega_0^2}{n^4} - \frac{a}{n^2} - \frac{4\pi^2 A}{\lambda_0^2} = 0,$$

c'est-à-dire que n est donnée par une équation de la forme

$$\frac{1}{n^4} - \frac{\alpha}{n^2} + \frac{\beta}{\lambda_0^2} = 0,$$

α et β étant des constantes; la racine que l'on doit prendre est celle qui a pour valeur approchée $n = \sqrt{\alpha}$. L'expérience a confirmé cette formule et prouvé que β est positif. Ce que nous trouvons pour les corps isotropes est conforme a ce qui a été donné par Cauchy (*Mémoires de Prague*, p. 60).

4. Revenons aux cristaux uniaxes, et considérons encore les méridiens des deux ondes situés dans le plan des zx, courbes qui ont l'axe des z pour axe de symétrie.

Désignons par χ l'angle de la normale à l'onde plane

$$ux + wz = s$$

avec l'axe des z, et par λ la longueur d'ondulation correspondante; posons encore

$$u^2 + w^2 = k^2$$

et nous aurons

$$\cos\chi = \frac{w}{k}, \quad \sin\chi = \frac{u}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Récrivons les deux formules trouvées ci-dessus

$$(e) \qquad s^2 = (u^2 + w^2)(a + Au^2 + Cw^2),$$

$$(d) \qquad s^2 = cu^2 + aw^2 + Bu^4 + 2Du^2w^2 + Cw^4,$$

dont la première convient au rayon *ordinaire*, la seconde au rayon *extraordinaire*.

Considérons d'abord le rayon ordinaire, et désignons par $\omega = \frac{s}{k}$ la vitesse de l'onde plane d'une certaine couleur, par ω_0 la vitesse de la même lumière dans l'air et par λ_0 sa longueur d'ondulation aussi dans l'air; enfin soit T la durée de la vibration qui est la même dans les deux milieux. Nous aurons

$$\omega = \frac{\lambda}{T}, \quad \omega_0 = \frac{\lambda_0}{T}, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\omega_0}{\lambda_0\omega},$$

et, d'après (e),

$$\omega^2 = a + (A\sin^2\chi + B\cos^2\chi)\frac{4\pi^2\omega_0^2}{\omega^2\lambda_0^2}.$$

Pour le rayon extraordinaire, employons les mêmes lettres ω et χ en les accentuant, pour représenter les quantités analogues à celles que nous venons de désigner par ces lettres, relativement au rayon ordinaire, et nous aurons, d'après (d),

$$\begin{aligned}\omega'^2 &= c\sin^2\chi' + a\cos^2\chi' \\ &\quad + (B\sin^4\chi' + 2D\sin^2\chi'\cos^2\chi' + C\cos^4\chi')\frac{4\pi^2\omega_0^2}{\omega'^2\lambda_0^2}.\end{aligned}$$

Posons

$$(g)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{a}{\omega_0^2} = \alpha^2, \quad \frac{c}{\omega_0^2} = \beta^2, \\ &-\frac{4\pi^2 A}{\omega_0^2} = E, \quad -\frac{4\pi^2 B}{\omega_0^2} = F, \quad -\frac{4\pi^2 C}{\omega_0^2} = G, \quad -\frac{4\pi^2 D}{\omega_0^2} = H,\end{aligned}\right.$$

les formules précédentes deviennent

$$(\nu)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - \alpha^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + (E\sin^2\chi + G\cos^2\chi)\frac{1}{\lambda_0^2} = 0, \\ &\left(\frac{\omega'}{\omega_0}\right)^4 - (\beta^2\sin^2\chi' + \alpha^2\cos^2\chi')\left(\frac{\omega'}{\omega_0}\right)^2 \\ &\qquad + (F\sin^4\chi' + 2H\sin^2\chi'\cos^2\chi' + G\cos^4\chi')\frac{1}{\lambda_0^2} = 0,\end{aligned}\right.$$

et l'on doit prendre pour $\frac{\omega}{\omega_0}$ et $\frac{\omega'}{\omega_0}$ les plus grandes racines de ces équations.

Cherchons maintenant la réfraction d'un rayon, en prenant d'abord une face réfringente contenant l'axe, et le rayon incident situé dans un plan perpendiculaire à l'axe; les rayons réfractés ordinaire et extraordinaire seront aussi perpendiculaires à l'axe de sorte que l'on aura

$$\chi = \chi' = \frac{\pi}{2},$$

et si l'on remarque que $\frac{\omega_0}{\omega}$ et $\frac{\omega_0}{\omega'}$ deviennent des indices de réfraction n et n', on tire des formules (ν)

$$\frac{1}{n^4} - \frac{\alpha^2}{n^2} + \frac{E}{\lambda_0^2} = 0, \quad \frac{1}{n'^4} - \frac{\beta^2}{n'^2} + \frac{F}{\lambda_0^2} = 0;$$

la vérification expérimentale de ces formules déterminera les quatre constantes α, β, E, F. Des expériences de ce genre ont été faites par M. Rudberg.

Ensuite, pour vérifier les formules (ν), nous supposerons que la face réfringente du cristal soit normale à l'axe, que l'on ait fait arriver le rayon incident sous diverses inclinaisons déterminées, et que l'on ait pu déterminer par l'expérience les angles des rayons réfractés avec l'axe.

Mais les formules (ν) renferment les angles χ et χ' qu'il faudra savoir calculer au moyen des angles φ et φ' des rayons réfractés avec l'axe et que nous supposons des données de l'expérience. Désignons par $F = 0$ l'une des équations (e) et (d), et considérant u et w comme des coordonnées rectilignes variables, nous aurons l'équation d'une courbe. Or, d'après le n° **2** de la première partie, on obtient la direction d'un rayon réfracté correspondant à une direction $\left(\frac{u}{k}, \frac{w}{k}\right)$ de l'onde plane en menant la tangente à cette courbe au point u, w et abaissant sur cette tangente une perpendiculaire qui donne la direction cherchée. On a donc

$$(w) \qquad \tang\varphi = \frac{\frac{dF}{du}}{\frac{dF}{dw}}.$$

Appliquée à l'équation (e), cette formule donne

$$\tan g\varphi = \frac{au + 2Au^3 + (A + C)uv^2}{av + (A + C)u^2v + 2Cv^3}$$

$$= \frac{a\sin\chi - [2A\sin^3\chi + (A + C)\sin\chi\cos^2\chi]\frac{4\pi^2\omega_0^2}{\omega^2\lambda_0^2}}{a\cos\chi - [(A + C)\sin^2\chi\cos\chi + 2C\cos^3\chi]\frac{4\pi^2\omega_0^2}{\omega^2\lambda_0^2}},$$

ou encore, d'après les formules (g),

$$(\beta)\qquad \tan g\varphi = \tan g\chi\,\frac{\alpha^2 - [2E\sin^2\chi + (E + G)\cos^2\chi]\frac{\omega_0^2}{\omega^2\lambda_0^2}}{\alpha^2 - [(E + G)\sin^2\chi + 2G\cos^2\chi]\frac{\omega_0^2}{\omega^2\lambda_0^2}}.$$

Bien que nous nous occupions du rayon ordinaire, $\frac{\omega}{\omega_0}$ n'est pas égal à $\frac{\sin\varphi}{\sin i}$; mais, d'après la construction générale d'Huyghens qui détermine le rayon réfracté au moyen du rayon incident, on a

$$(\alpha)\qquad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\sin\chi}{\sin i}.$$

Dans la première formule (ν), les valeurs des constantes α et E doivent être supposées connues, et il reste à déterminer G.

Supposons qu'on ait fait arriver un rayon sous une incidence i et que l'expérience ait donné φ, angle du rayon réfracté ordinaire avec l'axe. La première formule (ν) et les équations (α), (β) renferment trois inconnues G, $\frac{\omega}{\omega_0}$, χ; on peut donc déterminer G. Mais ces trois équations ne sont pas sous une forme commode à ce calcul, dans lequel il faut profiter de ce que χ diffère très-peu de φ.

Posons

$$\frac{\sin i}{\sin\varphi} = n,$$

n est une quantité connue, puisque i et φ le sont; puis faisons

$$\chi = \varphi + \varepsilon,\quad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1 + \tau}{n};$$

et pour transformer nos trois formules, considérons

$$(t) \qquad \varepsilon, \quad \tau, \quad \frac{E}{\lambda_0^2}, \quad \frac{G}{\lambda_0^2}$$

comme de très-petites quantités dont on peut négliger les carrés et les produits deux à deux. L'équation (α) devient facilement

$$(\mathrm{L}) \qquad \frac{\tau}{n} = \varepsilon \frac{\cos\varphi}{\sin i};$$

pour transformer (β), on remplacera dans la fraction χ par φ, puis $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ par $\frac{1+2\tau}{n^2}$, $\operatorname{tang}\chi$ par $\operatorname{tang}\varphi + \frac{\varepsilon}{\cos^2\varphi}$, et, après quelques réductions faciles, on trouvera

$$(\mathrm{M}) \qquad \frac{\alpha^2\varepsilon}{n^2} = \frac{E-G}{\lambda_0^2}\sin\varphi\cos\varphi.$$

Enfin dans la première formule (ν), on remplacera respectivement

$$\chi, \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2, \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

par

$$\varphi, \quad \frac{1+2\tau}{n^2}, \quad \frac{1+4\tau}{n^4},$$

et l'on aura

$$(\mathrm{P}) \qquad \frac{1}{n^4} - \frac{\alpha^2}{n^2} + 2\tau\left(\frac{2}{n^4} - \frac{\alpha^2}{n^2}\right) + (E\sin^2\varphi + G\cos^2\varphi)\frac{1}{\lambda_0^2} = 0.$$

On pourra donc calculer ε, τ et $\frac{G}{\lambda_0^2}$ au moyen des trois équations du premier degré (L), (M), (P). On verrait aisément, ce calcul fait, comment on pourrait, si on le jugeait utile, tenir compte d'après la méthode des approximations successives des carrés et produits deux à deux des quantités (t).

Tous les coefficients de la première équation (ν) étant maintenant connus, concevons une expérience nouvelle qui ait déterminé une autre incidence i et l'angle correspondant φ de réfraction; deux des trois équations (L), (M), (P) détermineront τ et ε, qui devront satisfaire à la troisième.

Occupons-nous ensuite du rayon extraordinaire. Appliquons donc la formule (w) à l'équation (d) et nous aurons

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{cu + 2Bu^3 + 2Duw^3}{aw + 2Du^2w + 2Cw^3},$$

φ' étant l'angle du rayon extraordinaire avec l'axe du cristal. De là on déduira par le calcul qui a conduit à (β)

$$(\gamma) \qquad \operatorname{tang}\varphi' = \operatorname{tang}\chi' \frac{\beta^2 - 2(F\sin^2\chi' + H\cos^2\chi')\dfrac{\omega_0^2}{\omega'^2\lambda_0^2}}{\alpha^2 - 2(H\sin^2\chi' + G\cos^2\chi')\dfrac{\omega_0^2}{\omega'^2\lambda_0^2}}.$$

Enfin nous avons

$$(\delta) \qquad \frac{\omega'}{\omega_0} = \frac{\sin\chi'}{\sin i},$$

puisque nous supposons la face réfringente normale à l'axe.

Concevons une expérience qui ait donné un angle i et l'angle φ' correspondant; la seconde formule (ν) et les deux équations (γ) et (δ) contiendront trois inconnues $\frac{\omega'}{\omega_0}$, χ' et H, et pourront par conséquent servir à déterminer la constante H. Il faudrait encore transformer ces trois formules pour rendre leur application facile; mais, pour abréger, nous n'effectuerons pas ces transformations.

Tous les coefficients de la seconde équation (ν) étant connus, de nouvelles expériences serviront comme ci-dessus à vérifier cette formule.

Remarquons en terminant qu'on passe de la formule (d) à la formule (e) en changeant c, B, 2D en a, A, A + C, ou en changeant β^2, F, 2H en α^2, E, E + G; donc on doit passer de même de la seconde formule (ν) à la première, et de la formule (γ) à la formule (β). Ce qui montre comment ayant déterminé les formules qui conviennent au rayon extraordinaire, on peut en déduire celles qui sont relatives au rayon ordinaire.

Nota. — A la deuxième page de la préface de notre Mémoire, nous aurions dû pour la discussion de l'introduction des termes que nous y désignons par $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ renvoyer à un beau Mémoire de M. de Saint-Venant sur la théorie de l'élasticité, publié dans ce Journal (août 1863, p. 270).

SUR LES DEUX FORMES

$3x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 10zt + 10t^2$, $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 15z^2 + 15t^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Je note encore ici deux formes qu'il est bon de considérer à la fois en combinant d'une certaine manière les nombres

$$\mathrm{N}(n = 3x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 10zt + 10t^2)$$

et

$$\mathrm{N}(n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 15z^2 + 15t^2)$$

de représentations qu'elles fournissent pour un même entier n; car, quoiqu'il soit sans doute très-difficile d'obtenir une expression simple de chacun de ces nombres pris à part, on trouve néanmoins facilement la valeur de la somme suivante

$$\begin{aligned} &4\mathrm{N}(n = 3x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 10zt + 10t^2) \\ &+ 6\mathrm{N}(n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 15z^2 + 15t^2). \end{aligned}$$

Je puis démontrer en effet que cette valeur est égale à celle de cette autre somme

$$\mathrm{N}[3n = x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2)] + 9\mathrm{N}\{n = 3[x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2)]\}$$

dont les deux termes s'expriment tout de suite au moyen de ce que j'ai donné concernant la forme

$$x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2)$$

dans le cahier de janvier 1864.

On remarquera que

$$N\{n = 3[x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2)]\} = 0$$

quand n n'est pas divisible par 3, tandis que pour n divisible par 3, ou pour $n = 3q$, l'on a

$$N\{n = 3[x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2)]\} = N[q = x^2 + 5(y^2 + z^2 + t^2)].$$

Je laisse au lecteur à trouver la formule explicite qui résulte naturellement des considérations précédentes.

SUR

LA DÉFORMATION DES SURFACES;

Par M. Camille JORDAN,

Ingénieur des Mines, Docteur ès sciences.

Un des problèmes les plus connus de la Géométrie, est le suivant :

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et inextensibles puissent être appliquées l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature.

On peut se proposer un problème analogue, en supposant au contraire que les surfaces considérées soient extensibles à volonté. La question ainsi simplifiée rentre dans la géométrie de situation, et nous allons la résoudre en démontrant le théorème suivant :

Théorème. — *Pour que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et extensibles à volonté soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature, il faut et il suffit :*

1° *Que le nombre des contours séparés qui limitent respectivement ces deux portions de surfaces soit le même.* (*Si les surfaces considérées sont fermées, ce nombre est nul.*)

2° *Que le nombre maximum des contours fermés ne se traversant ni eux-mêmes ni mutuellement nulle part, que l'on peut tracer sur chacune des deux surfaces sans la partager en deux régions séparées, soit le même de part et d'autre.*

1° On voit aisément que les conditions ci-dessus sont nécessaires. Soit en effet S une surface quelconque; soient m le nombre des contours qui la limitent, n le nombre des contours fermés ne se traversant pas mutuellement, qu'on peut tracer sans la diviser en régions séparées. Déformons S d'une manière quelconque par flexion et exten-

sion : il est clair que si deux lignes quelconques tracées sur S ne se coupent pas, leurs transformées ne se couperont pas. Cela posé, les m contours limites auront pour transformés m nouveaux contours qui formeront la limite de la surface transformée S′, et les n contours fermés intérieurs $C, C_1,\ldots, C_{n-1}$ auront pour transformés n contours fermés intérieurs à S′, $C', C'_1,\ldots, C'_{n-1}$. Ces nouveaux contours ne se traverseront pas eux-mêmes ni mutuellement. D'autre part, ils ne partagent pas S′ en deux régions distinctes, car $C, C_1,\ldots, C_{n-1}$ ne partageant pas S en deux régions, on peut joindre ensemble deux points quelconques de S par une ligne L qui ne traverse aucun de ces contours. La transformée de L, L′, qui joint les points correspondants de S′, ne traversera aucun des contours $C', C'_1,\ldots, C'_{n-1}$; on peut donc sans traverser ces contours, joindre ensemble deux points quelconques de S′.

Soient maintenant m' le nombre des contours qui limitent S′; n' le nombre maximum des contours intérieurs (ne se traversant nulle part) qu'on peut y tracer sans la partager en deux régions. On voit par ce qui précède, que m' est au moins égal à m et n' à n. Mais réciproquement, on peut passer de S′ à S par une déformation convenable; donc m et n sont au moins égaux à m' et n'. Donc $m = m'$, $n = n'$.

2° Il reste à prouver que ces conditions sont suffisantes. Nous nous appuierons pour cela sur le principe suivant qu'on peut regarder comme évident, et prendre au besoin pour définition :

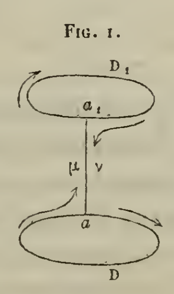
Deux surfaces S, S′ *sont applicables l'une sur l'autre si l'on peut les décomposer en éléments infiniment petits, de telle sorte qu'à des éléments quelconques contigus de* S *correspondent des éléments contigus de* S′ [*].

Soit maintenant S une surface limitée par m contours $A, A_1,\ldots, A_{m-1}$, et telle, qu'on puisse y tracer n contours fermés $C, C_1,\ldots, C_{n-1}$ qui ne se traversent pas, sans la partager en deux régions distinctes. On peut

[*] Les diverses nappes de la surface considérée pourraient se réunir en certains points singuliers, comme par exemple au sommet d'un cône, ou se couper mutuellement suivant des lignes singulières. Pour éviter toute difficulté de ce genre, nous conviendrons de ne tenir aucun compte de ces liaisons accidentelles, et de ne pas considérer comme contigus deux points même très-rapprochés, pris sur des nappes différentes.

décomposer S en éléments, de la manière suivante : Supposons cette surface coupée suivant les contours C, $C_1, \ldots, C_{n-1}$, on obtiendra ainsi une nouvelle surface T encore d'une seule pièce, mais que tout contour fermé K partage en deux régions distinctes; car si cela n'avait pas lieu, on pourrait tracer simultanément sur la surface S les $n+1$ contours C, $C_1, \ldots, C_{n-1}$, K sans la diviser en régions distinctes, ce qui est contraire à notre hypothèse. La surface T est d'ailleurs limitée par $m+2n$ contours, à savoir A, $A_1, \ldots, A_{m-1}$ et les deux bords des sections faites le long de chacun des n contours C, $C_1, \ldots, C_{n-1}$. Soient D, D_1 deux quelconques de ces $m+2n$ contours (*fig.* 1); la surface T

Fig. 1.

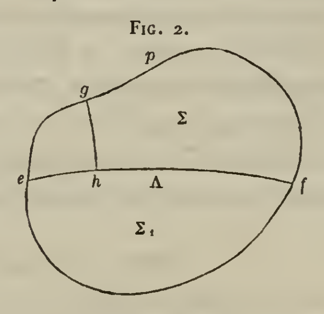


étant d'une seule pièce, on pourra y tracer une transversale L joignant un point quelconque a de D à un point quelconque a_1 de D_1, et qui ne se coupe pas elle-même. En coupant la surface T suivant cette transversale, on aura une nouvelle surface T_1 encore d'une seule pièce; car si μ et ν sont deux points voisins situés de part et d'autre de la transversale, on pourra passer de l'un à l'autre en suivant la transversale, puis le contour D, puis l'autre côté de la transversale. Cette surface T_1 est limitée par les mêmes contours que T, sauf que le système des deux contours distincts D, D_1 est remplacé par un contour unique, formé de D, D_1 et des deux bords de la section faite suivant la transversale. (Ce contour est indiqué par les flèches sur la *fig.* 1.) Ainsi le nombre des contours qui limitent T_1 n'est plus que $m+2n-1$. Soient b, b_1, deux points pris arbitrairement sur deux de ces contours, on peut les joindre ensemble par une transversale L_1 et en coupant T_1 suivant cette transversale, on aura une nouvelle surface T_2 limitée par $m+2n-2$ contours. Poursuivant ainsi, on arrivera à une surface U, limitée par un seul contour; d'ailleurs tout contour fermé tracé sur U est par là

même tracé sur T. Il divise donc T, et par suite U, en deux régions distinctes.

Soient maintenant e, f deux points quelconques pris sur le contour de U : on peut les joindre par une transversale Λ (*fig.* 2). Cette trans-

FIG. 2.



versale partage U en deux régions distinctes, car le contour fermé $fepf$ étant tracé sur U, ne coupe aucun des contours D, D_1,... qui limitent T. Il partage donc conjointement avec ces derniers contours la surface T en deux régions distinctes. Si donc μ et ν sont deux points infiniment voisins, situés de part et d'autre de la transversale, on ne pourra passer de l'un à l'autre sans traverser ou ef, ou epf, ou quelqu'un des contours D, D_1,..., mais ces derniers contours, ainsi que epf, font partie du contour unique qui limite U. On ne peut donc passer de μ à ν sans traverser ou le contour de U ou la transversale : donc celle-ci divise U en deux régions, Σ et Σ_1.

Soient g, h deux points pris arbitrairement sur le contour de l'une de ces régions, Σ par exemple (*fig.* 2), on peut les joindre par une nouvelle transversale tracée sur Σ, laquelle divisera nécessairement Σ en deux régions distinctes. En effet, la transversale ghe partage, comme nous venons de le voir, la surface U en deux régions distinctes, de telle sorte qu'on ne puisse passer d'un côté à l'autre de cette transversale sans la traverser ou sans sortir de U. Pour passer d'un côté de gh à l'autre, il faut donc, ou sortir de U et *a fortiori* de Σ, ou traverser eh, ce qui fait encore sortir de Σ, ou enfin traverser gh; donc gh coupe Σ en deux régions distinctes. Chacune de ces deux régions sera partagée de même en deux autres par une nouvelle transversale, etc. En multipliant indéfiniment les transversales, on arrivera à décomposer la surface considérée en éléments infiniment petits.

Soit maintenant S' une autre surface limitée par m contours A', A'_1,..., A'_{m-1}, et telle, qu'on puisse y tracer n contours fermés C', C'_1,..., C'_{n-1}, ne se traversant ni eux-mêmes ni mutuellement, sans la partager en régions distinctes. Coupons S' suivant les contours C', C'_1,..., C'_{n-1}. La nouvelle surface T' ainsi obtenue sera limitée comme l'était T par $m+2n$ contours, à savoir A', A'_1,..., A'_{m-1}, et les deux bords des sections faites suivant les contours C', C'_1,..., C'_{n-1}. Soient par exemple Γ' et Δ' les deux bords de la fente faite suivant C'; chaque point de S' situé sur C' peut être considéré comme résultant de la jonction de deux points de la surface T', situés, l'un sur Γ', l'autre sur Δ'. De la même manière, chaque point de S situé sur C pouvait être considéré comme résultant de la jonction de deux points situés sur les contours Γ et Δ, qui tous deux limitent la surface T.

Cela posé, faisons correspondre respectivement les contours A', A'_1,..., A'_{m-1}, Γ', Γ'_1,..., Γ'_{n-1} aux contours A, A_1,..., A_{m-1}, Γ, Γ_1,..., Γ_{n-1}, de telle sorte que deux points consécutifs pris sur A, par exemple, aient respectivement pour correspondants deux points consécutifs pris sur A'. Faisons encore correspondre Δ', Δ'_1,..., Δ'_{n-1} à Δ, Δ_1,..., Δ_{n-1}, de telle sorte que les points correspondants de Δ et de Δ', par exemple, soient ceux qui se confondent avec des points correspondants de Γ et de Γ'.

A la transversale L, qui joint ensemble les points a, a_1, faisons correspondre une transversale L' joignant les points correspondants a', a'_1, chaque point de L' pouvant d'ailleurs correspondre à un point quelconque de L, avec cette seule restriction, que les points correspondants se suivent respectivement dans le même ordre sur chacune de ces deux lignes. De même à la transversale L_1, qui joint ensemble b, b_1, faisons correspondre une transversale L'_1 joignant ensemble les points correspondants b', b'_1. A la transversale Λ qui joint e à f, faisons correspondre une transversale Λ' qui joigne e' à f', etc.

Le réseau de transversales ainsi tracé sur S' décompose cette surface en éléments respectivement correspondants à ceux de S, et il est clair, d'après notre mode de procéder, qu'à des éléments contigus de S correspondent des éléments contigus de S'.

Le théorème est donc démontré.

Chalon-sur-Saône, février 1866.

DES

CONTOURS TRACÉS SUR LES SURFACES;

PAR M. CAMILLE **JORDAN**,
Ingénieur des Mines.

Deux contours fermés quelconques, tracés sur une surface donnée, seront dits *réductibles* l'un à l'autre, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation progressive.

Deux contours quelconques tracés sur un plan sont toujours réductibles l'un à l'autre; mais il n'en est pas de même sur toute surface : ainsi, par exemple, il est clair que dans un tore un méridien et un parallèle forment deux contours irréductibles.

Nous nous proposons ici de déterminer dans quel cas deux contours, tracés sur une surface donnée, sont réductibles l'un à l'autre.

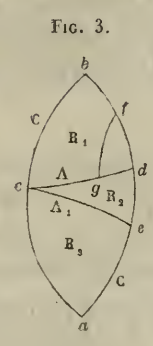
I.

La surface considérée peut avoir diverses nappes qui pourraient se réunir en certains points singuliers, comme au sommet d'un cône, ou se couper mutuellement suivant des lignes singulières. Nous conviendrons de ne tenir aucun compte de ces liaisons accidentelles, et de ne pas considérer comme contigus sur la surface deux points infiniment voisins, mais pris sur deux nappes différentes.

LEMME I. — *Soit* R *une région de la surface, laquelle soit complétement limitée par un contour fermé* C *qui ne se traverse lui-même nulle part. Supposons en outre que toute transversale tracée sur* R *entre deux points quelconques de* C *divise* R *en deux parties séparées : a et b étant deux points pris arbitrairement sur* C, *les deux portions acb, adb dans lesquelles ils partagent ce contour sont réductibles l'une à l'autre par une déformation qui laisse les points a et b invariables.*

Soient en effet c un point arbitraire choisi sur la portion acb du contour C (*fig.* 3); d et e deux points arbitraires pris sur l'autre moitié

Fig. 3.



du contour. Traçons sur R, de c à d, une transversale A qui ne se coupe pas elle-même. Elle partage R en deux régions distinctes que nous désignerons par R_1 et par ρ. Chacune de ces deux régions est d'ailleurs partagée elle-même par toute transversale en deux régions séparées. Soit en effet fg par exemple une transversale tracée sur R_1. La transversale fgd partage par hypothèse R en deux régions distinctes; on ne pourra donc passer d'un côté à l'autre de fg sur R sans traverser ou gd, ce qui fait sortir de R_1, ou fg : donc fg partage R_1 en deux régions séparées.

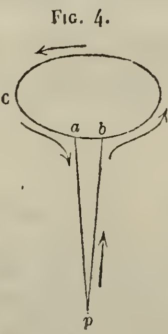
Cela posé, supposons pour fixer les idées que le point e soit dans la région ρ (*fig.* 3). Traçons dans cette région une transversale A_1 entre les points c et e, elle partage ρ en deux régions R_2 et R_3; R se trouve ainsi partagé en trois régions, R_1, R_2, R_3.

Si le lemme est vrai pour chacune de ces régions partielles, il le sera pour R. En effet, ac sera réductible par hypothèse à aec, et cb à cdb : acb sera donc réductible à $aecdb$, ou, comme ecd est réductible à ed, acb le sera à adb.

Pour démontrer la proposition pour l'une des régions partielles telle que R_1, on la décomposera de même en trois autres, et l'on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à des régions infiniment petites. Mais pour ces dernières, le théorème devient intuitif, la nappe à laquelle appartient la région considérée se confondant avec son plan tangent (ou plus généralement avec une nappe de cône tangente).

Lemme II. — *Soient* C *un contour quelconque; p un point arbitraire de la surface; a et b deux points infiniment voisins pris sur* C; *ap*, *bp deux lignes infiniment voisines menées de ces points à p, de manière à ne se traverser ni elles-mêmes ni mutuellement; ab est réductible à apb, et par suite le contour* C *est réductible au contour indiqué par les flèches* (*fig.* 4).

Fig. 4.



En effet, la chose serait évidente si la surface considérée était plane, ou, ce qui revient au même, développable; mais la surface se confond dans la zone infiniment étroite *apb* avec la surface développable qui lui est circonscrite suivant *ap*. (Nous supposons pour simplifier que cette ligne a été tracée de manière à éviter les points singuliers.) Le lemme est donc démontré.

Les points *a* et *b* étant infiniment voisins l'un de l'autre, le contour substitué à C en vertu du lemme précédent est formé de C et d'une ligne *ap*, qui se trouve parcourue deux fois de suite en sens différents. Nous dirons que cette ligne est *adjointe* au contour *c* par la déformation ci-dessus.

Deux contours qui ne diffèrent l'un de l'autre que par une ligne arbitraire décrite deux fois de suite en sens contraires sont donc réductibles l'un à l'autre.

Soient S la surface considérée, *m* le nombre des contours distincts A, $A_1, \ldots, A_{m-1}$ qui forment sa limite (*m* pouvant se réduire à zéro, si la surface est fermée). Soit de plus *n* le nombre maximum des contours fermés distincts ne se traversant pas eux-mêmes ni mutuellement, que l'on peut tracer sur la surface sans la partager en deux régions séparées.

Imaginons la surface S coupée suivant chacun de ces contours C, C_1,..., C_{n-1}. La nouvelle surface T ainsi obtenue est d'une seule pièce; tout contour fermé la partage en deux régions distinctes; enfin elle est limitée par $m+2n$ contours, à savoir A, A_1,..., A_{m-1}, et les deux bords C', C'', C'_1, C''_1,... des sections faites respectivement suivant C, C_1,..., C_{n-1} (p. 107).

Soient D, D' deux quelconques de ces $m+2n$ contours; *a*, *a'* deux points pris respectivement sur D et D', on peut les joindre par une transversale située sur T et qui ne se coupe pas elle-même. En coupant T suivant cette transversale, on aura une nouvelle surface T_1 d'une seule pièce et limitée par les mêmes contours que T, excepté qu'à la place des deux contours distincts D, D' on aura un contour unique K formé de D, D' et de la transversale, décrite deux fois en sens contraire (p. 107). Supposons maintenant que l'on choisisse pour D et D' les deux bords C' et C'' de la section faite suivant C, et pour *a*, *a'* les deux points qui correspondent à un même point de C : la transversale devient alors un contour fermé Γ qui coupe en *a* le contour C et ne traverse nulle part ailleurs les contours C, C_1,..., C_{n-1}. Le contour K sera alors formé du contour C, du contour Γ, du contour C décrit en sens inverse du primitif, puis du contour Γ décrit en sens inverse du primitif.

On voit qu'un contour C étant donné, il y a lieu de distinguer l'un de l'autre les deux sens dans lesquels il peut être décrit. Nous conviendrons de désigner par C le contour décrit dans un certain sens choisi à volonté, et par C^{-1} le même contour décrit en sens inverse. On aura alors entre le contour K et les quatre contours composants C, Γ, C^{-1}, Γ^{-1} la relation symbolique $K = C\Gamma C^{-1}\Gamma^{-1}$.

La surface T_1 étant encore tout d'une pièce, soit a_1 un point situé sur le contour C_1, on voit comme tout à l'heure qu'on peut déterminer un contour Γ_1 ne se traversant pas lui-même, traversant C_1 en a_1 et ne traversant nulle autre part les contours qui limitent T_1. En coupant T_1 suivant Γ_1 on aurait une autre surface T_2 encore tout d'une pièce.

Poursuivant ainsi, on voit qu'*on peut déterminer une suite de n contours nouveaux* Γ, Γ_1,..., *jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Chaque contour* Γ, Γ_1,... *ne se coupe lui-même nulle part et ne coupe non plus nulle part ceux de la même suite.*

2° *Il traverse en un seul point le contour correspondant de la suite* C, C_1,..., *et ne traverse nulle part les autres contours de cette suite.*

Ces conditions étant remplies, le système des contours

$$\begin{matrix} C, C_1, \ldots, C_{n-1}, \\ \Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}, \end{matrix} \quad A, \ldots, A_{m-1}$$

sera insuffisant, comme nous l'avons vu, pour partager la surface en deux régions distinctes.

Soient respectivement $a, a_1, \ldots, a_{n-1}$ *les points d'intersection de* C *et* Γ, *de* C_1 *et* Γ_1,... *de* C_{n-1} *et* Γ_{n-1}; $a', \ldots, a'_{m-1}$ *des points arbitraires pris respectivement sur* $A, \ldots, A_{m-1}$; *p un point quelconque de la surface, on pourra joindre ce point aux précédents par une série de lignes* pa, $pa_1, \ldots, pa_{n-1}$, $pa', \ldots, pa'_{m-1}$, *qui ne se traversent ni elles-mêmes ni mutuellement en aucun point, et qui ne traversent non plus nulle part les contours*

$$\begin{matrix} C, C_1, \ldots, C_{n-1}, \\ \Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}, \end{matrix} \quad A, \ldots, A_{m-1}.$$

En effet, soit T' la surface obtenue en coupant S suivant les contours $C, C_1, \ldots, C_{n-1}, \Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$. Cette surface étant encore d'une seule pièce, on pourra y tracer une ligne pa joignant le point intérieur p au point a situé sur le contour. Coupons maintenant T' suivant pa : la nouvelle surface obtenue T'' sera encore d'une seule pièce; car soient α, β deux points voisins situés de part et d'autre de pa, on pourra passer de α à β sans sortir de T'', en suivant la ligne pa jusqu'en a, décrivant ensuite le contour $C\Gamma C^{-1}\Gamma^{-1}$, puis l'autre côté de la ligne ap jusqu'en β.

On pourra maintenant joindre p au point a_1 par une ligne pa_1 ne se traversant pas elle-même, et tracée sur T'' de telle sorte qu'elle ne traverse ni pa ni les contours $C, C_1, \ldots, \Gamma, \Gamma_1, \ldots$, et l'on continuera le raisonnement qui précède jusqu'à ce qu'on ait tracé toutes les lignes pa, $pa_1, \ldots$, $pa', \ldots$, de manière à satisfaire aux conditions énoncées.

Nous donnerons le nom de *contours élémentaires* à ceux qui s'obtiennent en adjoignant à l'un des contours

$$\begin{matrix} C, C_1, \ldots, C_{n-1}, \\ \Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}, \end{matrix} \; A, \ldots, A_{m-1},$$

celle des lignes pa, $pa_1, \ldots, pa_{n-1}$, $pa', \ldots, pa'_{m-1}$ qui y aboutit. Ainsi $pa.C.ap$, par exemple, sera le contour élémentaire correspondant à C. Nous le désignerons par la notation [C].

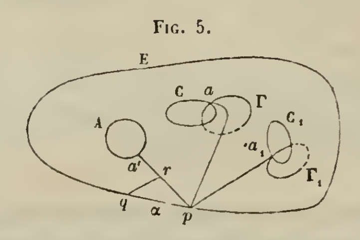
Lemme III. — *Tout contour* E *passant par p qui ne se traverse pas lui-même et ne traverse nulle part les contours élémentaires, est réductible de deux manières différentes à un système de contours élémentaires.*

1° Et d'abord, le contour E partage S en deux régions distinctes. En effet, ce contour étant fermé, partage T en deux régions distinctes ρ et ρ'. Soient C', C'' les deux contours limites de T qui correspondent au contour unique C; si ces deux contours n'appartenaient pas à la même région, la transversale Γ qui joint un point de C' à un point de C'' passerait de l'une des régions sur l'autre, et par suite traverserait E, contrairement à l'hypothèse. Donc C' et C'' appartiennent à la même région. De même pour C'_1 et $C''_1, \ldots$. Cela posé, passons de la surface T à la surface S en rejoignant les parties qui ont été séparées. Les parties que l'on rejoint appartenant toujours à une même région, les deux régions resteront encore séparées : donc E divise S en deux régions séparées, comme nous l'avons annoncé.

2° Soit ρ l'une de ces régions : supposons pour fixer les idées qu'elle contienne dans son intérieur les contours A, C, $C_1 \ldots$ et non les contours A_1, $C_2, \ldots$; elle contiendra en entier les contours élémentaires [A], [C], $[C_1], \ldots$, puisqu'elle en contient une partie, et que par hypothèse, aucun de ces contours ne traverse la limite E; elle contiendra de même les contours [Γ], $[\Gamma_1], \ldots$ qui ont une partie commune avec les précédentes, et que E ne coupe pas. Par les mêmes raisons, les contours $[A_1]$, $[C_2]$, $[\Gamma_2], \ldots$ seront entièrement situés sur l'autre région.

3° Soit maintenant $p\alpha$ la tangente au contour E au point p (*fig.* 5). Supposons, pour fixer les idées, qu'un observateur partant d'un point α situé sur cette ligne dans le voisinage de p et se mettant à tourner autour de ce point dans le sens direct,

Fig. 5.



par exemple, rencontre les lignes pa', pa, pa_1, etc., dans l'ordre où elles sont écrites. Les contours

$$[A],\quad pa.C\Gamma C^{-1}\Gamma^{-1}.ap,\quad pa_1.C_1\Gamma_1 C_1^{-1}\Gamma_1^{-1}.a_1p,\ldots$$

forment par leur réunion un contour fermé F qui repasse plusieurs fois au point p, mais qui ne se traverse évidemment lui-même nulle part.

Le contour E est réductible au contour F. En effet, considérons le contour total qui résulte de la réunion des deux contours E et F^{-1}; il ne se traverse lui-même nulle part, et limite complétement une région de la surface (car il ne traverse aucun contour élémentaire). En outre toute transversale qr menée dans cette région (*fig.* 5) la partage en deux portions séparées. En effet, le contour fermé $pqrp$, joint aux contours $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$ qu'il ne traverse pas, doit par hypothèse partager S en deux régions distinctes, σ et σ_1. Soient d'ailleurs μ et ν deux points très-voisins situés de part et d'autre de qr. On ne pourra passer de μ à ν sur la surface S sans traverser le contour $pqrp$ ou l'un des contours $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$; or μ est situé sur la région ρ, on ne peut donc aller de ce point à C_2 sans traverser E; d'autre part, si l'on traverse C, $C_1, \ldots$, on traverse par cela même F, dont C, $C_1, \ldots$ font partie; enfin pq fait partie de E et rp de F. On ne peut donc passer de μ à ν sans traverser E, F ou qr, ce qui démontre notre proposition.

Il résulte de là (lemme I) que la partie E du contour est réductible à la portion F, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Dans le cas où la région ρ ne contiendrait aucun des

contours élémentaires, le raisonnement précédent appliqué au contour E montre que toute transversale coupe ρ en deux régions distinctes; donc (lemme I) si l'on partage E en deux portions quelconques, elles seront réductibles l'une à l'autre; E se trouvera alors réduit à une simple ligne, décrite deux fois de suite en sens opposés, ou, en supprimant cette ligne, ce qui est permis (lemme II), à un simple point.

4° Chacun des contours partiels qui composent F est un contour élémentaire tel que [A] ou un contour tel que $pa.C\Gamma C^{-1}\Gamma^{-1}.ap$ qui peut être réduit à un système de contours élémentaires par l'adjonction répétée de la ligne ap. En effet, le contour ci-dessus est réductible au suivant :

$$pa.C.ap.pa.\Gamma.ap.pa.C^{-1}.ap.pa.\Gamma^{-1}.ap = [C][\Gamma][C]^{-1}[\Gamma]^{-1}.$$

Il est donc démontré que le contour E peut être réduit à un certain système formé avec les contours élémentaires que renferme la région ρ. On pourrait même le réduire à un système des contours élémentaires que renferme l'autre région ρ'.

Le lemme est donc démontré.

Pour éviter toute ambiguïté dans l'expression du contour E, nous choisirons le système réduit relatif à celle des deux régions qui ne contient pas l'un des contours élémentaires choisi arbitrairement, [C] par exemple.

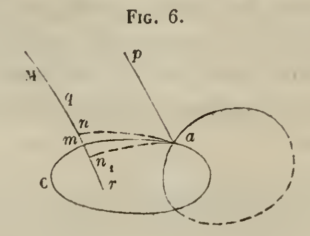
Nous allons démontrer maintenant qu'*un contour quelconque* M *peut être réduit à un système de contours tels que* E, *joints à des contours élémentaires.*

1° On peut admettre que tous les points où le contour proposé coupe les contours élémentaires sont situés sur les lignes pa',..., pa, pa_1.... En effet, supposons que M coupe C, par exemple, en un point m autre que a (*fig.* 6).

Soient n, n_1 deux points de M infiniment voisins et contenant m entre eux deux. Soient am la portion du contour C comprise entre a et m; an, an_1 deux lignes infiniment voisines de am et ne traversant

pas cette ligne. On pourra réduire nn_1 à nan_1 (lemme II); et par suite $M = \ldots qmr \ldots$ se réduit à $\ldots qnan_1 r \ldots$, qui, au lieu de couper C en m,

Fig. 6.



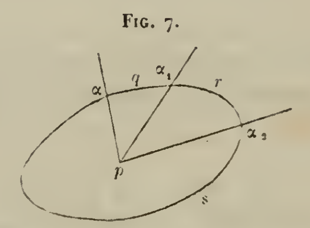
le coupe en a, point situé sur la ligne pa. D'ailleurs na, $n_1 a$ étant infiniment voisins de C ne traversent nulle part les autres contours élémentaires. Ainsi les autres intersections du contour proposé avec les contours élémentaires n'auront pas varié par cette déformation. A la limite, les points n, n_1 se confondent avec m, le nouveau contour auquel on a réduit le proposé sera le suivant :

$$\ldots qmamr \ldots.$$

2° Le contour ainsi transformé peut être réduit comme il suit à un système de contours partiels passant par p et coupant chacun en deux points au plus les contours élémentaires.

Soient α, α_1, α_2,... les points d'intersection du contour avec les contours élémentaires. Ces points étant situés sur les lignes pa, pa',..., adjoignons au contour proposé $\ldots qrs \ldots$ (*fig.* 7) les tronçons de ces

Fig. 7.



lignes compris respectivement entre les points α, α_1, α_2,... et p. Le nouveau contour obtenu sera évidemment la somme des suivants :

$$\ldots, p\alpha q\alpha_1 p, \quad p\alpha_1 r\alpha_2 p, \ldots.$$

Chacun de ces contours partiels passe par p, et comme les lignes $p\alpha$,

$p\alpha_1, \ldots$ font partie de certains contours élémentaires et ne coupent pas les autres, le contour partiel $p\alpha q \alpha_1 p$ ne pourra couper aucun contour élémentaire, si ce n'est aux deux points α, α_1. De même pour les autres contours partiels.

Remarque. — Cette réduction n'a pas lieu si le contour proposé M ne coupe aucun contour élémentaire. Mais soit alors k un point quelconque du contour; on peut le joindre à p par une ligne qui ne traverse aucun contour élémentaire, et cette ligne kp étant adjointe à M donnera un contour réduit N qui passe par p et ne traverse aucun contour élémentaire.

3° Soit $N = p\alpha\alpha_1 p$ un des contours partiels ci-dessus déterminés. Les lignes $p\alpha$, $p\alpha_1$ ne se traversent pas et ne sont traversées nulle part par $\alpha\alpha_1$, par construction; mais il se peut que la ligne $\alpha\alpha_1$ se coupe elle-même. Dans ce cas, le contour $p\alpha\alpha_1 p$ peut être réduit à un système de contours plus simples. Imaginons en effet un observateur parcourant le contour dans le sens $p\alpha\alpha_1 p$. Soit β le premier point où cet observateur traverse le chemin qu'il a déjà parcouru (*fig.* 8). En

Fig. 8.

adjoignant au contour la ligne $\beta\alpha p$, on le réduit évidemment aux deux suivants :

$$p\alpha\beta\gamma\beta\alpha p = N' \quad \text{et} \quad p\alpha\beta\alpha_1 p = N''.$$

On doit remarquer que chacun de ces deux contours est formé exclusivement de portions empruntées à N; comme N, il ne coupera donc nulle part les contours élémentaires, sauf peut-être aux points α, α_1; d'ailleurs le contour N' ne se coupe lui-même nulle part, par construction; quant au contour N'', il ne peut se couper lui-même que là où N

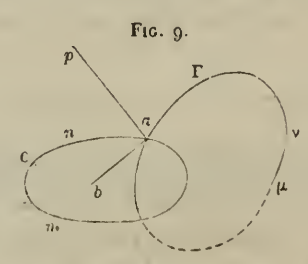
se coupe lui-même, d'ailleurs il ne se coupe pas en β où N se coupe. Le nombre des intersections de N″ avec lui-même est donc inférieur au moins d'une unité à celui des intersections de N avec lui-même.

Si N″ se coupe lui-même, on pourra le décomposer de la même manière que N, et continuant ainsi, on arrive à un système de contours réduits qui ne se traversent eux-mêmes nulle part. Tous ces contours ont un premier tronçon commun $p\alpha$ sur la ligne pa; le dernier de ces contours passe en outre au point α_1, et a pour dernier tronçon $\alpha_1 p$; tous les autres reviennent au point α, et ont pour dernier tronçon αp. Ces contours étant d'ailleurs exclusivement formés de portions empruntées à N, ne traversent les contours élémentaires nulle part, si ce n'est peut-être en α et α_1; d'ailleurs à partir de ces points, ils suivent sans les traverser les lignes pa, pa_1 : ils ne traversent donc nulle part les contours élémentaires, si α ou α_1 ne se confondent pas avec a ou a_1. Mais si α se confond avec a_1 chacun des contours réduits considérés pourra traverser en ce point ou C, ou Γ, ou ces deux contours à la fois. De même, si α_1 se confond avec a_1, le contour réduit qui y passe pourra traverser en ce point l'un ou l'autre des contours C_1, Γ_1, ou tous les deux. Nous allons voir que dans tous les cas chacun des contours réduits résulte de la combinaison de contours élémentaires avec un autre contour de l'espèce considérée au lemme III.

Soit en général $L = p\alpha b\alpha_1 p$ un contour qui ne se traverse pas lui-même, et dont les premier et dernier tronçons $p\alpha$, $\alpha_1 p$ appartiennent à des lignes de la série $pa, pa_1, \ldots, pa', \ldots$ (nous n'excluons pas le cas où α_1 se confondrait avec α), tandis que le tronçon intermédiaire $\alpha b \alpha_1$ ne traverse nulle part les contours élémentaires.

Supposons pour fixer les idées que le point α se confondant

Fig. 9.



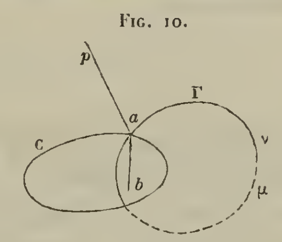
avec a (*fig.* 9), la ligne pab traverse en ce point le contour C, sans

traverser Γ. Adjoignons à pab la ligne $a\mu\nu ap$; la ligne pab se trouve ainsi transformée en $pa\mu\nu ap.pa\nu\mu ab$ et se trouve ainsi réduite à deux autres, dont la première n'est autre que le contour élémentaire $[\Gamma]^{-1}$, tandis que l'autre ne traverse plus ni C ni Γ au point a. D'ailleurs cette dernière ligne ne se traverse pas elle-même, et ne traverse ni $b\alpha_1 p$ ni aucun contour élémentaire; car les portions ajoutées à pab qu'elle contient, ne sont autres que le contour Γ, lequel ne traverse ni $b\alpha_1 p$, ni aucun contour élémentaire, sauf en a.

On voit de même que si pab traversait Γ en a sans traverser C, on pourrait réduire cette ligne au contour élémentaire $[C]^{-1}$, joint à une autre ligne $pamnab$, laquelle ne traverse plus ni $b\alpha_1 p$, ni aucun contour élémentaire.

Supposons enfin que pab traverse C et Γ en a (*fig.* 10). Adjoignons

Fig. 10.



à cette ligne la ligne $a\mu\nu ap$; elle se réduit au système des deux suivantes, $pa\mu\nu ap$ et $pa\nu\mu ab$, dont la première est le contour élémentaire $[\Gamma]^{-1}$, tandis que l'autre ne traverse plus C, mais traverse encore Γ. Cette dernière pourra être décomposée en deux autres : 1° le contour élémentaire $[C]^{-1}$; 2° une nouvelle ligne qui ne traverse plus ni $b\alpha_1 p$ ni aucun contour élémentaire.

Ainsi, dans tous les cas, la ligne pab peut être réduite à une autre ligne de la forme suivante, $[\Gamma]^x[C]^y.R$, R étant une ligne menée de p à b et qui ne traverse ni $b\alpha_1 p$, ni aucun contour élémentaire, et qui ne se coupe pas elle-même, et x, y étant chacun égal suivant le cas à zéro ou à -1. (Le symbole $[\Gamma]^x$ exprimant en général que le contour $[\Gamma]$ est décrit x fois de suite dans le sens direct, le symbole $[\Gamma]^0$ exprimera que l'on ne décrit pas ce contour.)

On voit de la même manière que $p\alpha_1 b$ se réduit dans tous les cas à une ligne de la forme $[\Gamma_1]^{x_1}[C_1]^{y_1}R_1$, R_1 ne se coupant pas lui-même,

et ne coupant en outre ni R ni les contours élémentaires, et par suite $b\alpha_1 p$ se réduit à la ligne $R_1^{-1}[C_1]^{-y_1}[\Gamma_1]^{-x_1}$. Le contour $p\alpha b\alpha_1 p$ se réduit donc au suivant :

$$[\Gamma]^x[C]^y.RR_1^{-1}[C_1]^{-y_1}[\Gamma_1]^{-x_1},$$

lequel est composé de contours élémentaires et du contour RR_1^{-1}; ce dernier satisfaisant d'ailleurs à toutes les conditions du lemme III, sera réductible à un simple point, ou à un système de contours élémentaires.

Tout contour pouvant être réduit à un système de contours tel que Γ, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Tout contour est réductible à un simple point ou à un système de contours élémentaires.*

II.

Il nous reste à chercher dans quel cas deux systèmes de contours élémentaires sont réductibles l'un à l'autre.

Considérons un contour fermé ne se traversant pas lui-même, ne traversant aucun contour élémentaire, et tracé de telle sorte que l'une des deux régions qu'il détermine dans la surface contienne les contours C et Γ, tous les autres contours A,..., C_1, Γ_1,... faisant partie de l'autre région. Nous avons vu que le contour donné est réductible d'une part à $[C][\Gamma][C]^{-1}[\Gamma]^{-1} = \Delta$, d'autre part à un système formé des contours [A],..., $[C_1]$, $[\Gamma_1]$,...; ainsi le contour Δ et son inverse Δ^{-1} sont réductibles à des systèmes formés des contours [A],..., $[C_1]$, $[\Gamma_1]$,....

Soient maintenant S et S' deux systèmes à comparer entre eux. Si S ou S' contient l'un des contours Δ, Δ^{-1}, on le remplacera par le contour dérivé de [A],..., $[C_1]$, $[\Gamma_1]$,... auquel il se réduit. Les opérations de ce genre étant exécutées, S et S' se trouveront respectivement ramenés à deux nouveaux contours S_1 et S'_1 également formés de contours élémentaires.

Cela posé, nous allons démontrer que S_1 *et* S'_1 *sont irréductibles l'un à l'autre s'ils ne sont pas formés des mêmes contours élémentaires décrits dans le même ordre, en un mot, s'ils ne sont pas identiques*. Pour

établir cette proposition, nous remarquerons en premier lieu que si l'on applique à S_1 et à S'_1 la méthode de réduction indiquée plus haut, on verra que chacun de ces contours est déjà réduit. En effet, soit pour fixer les idées $S_1 = [C][A][C_1]$.... Le contour $[C]$ coupe au point a le contour élémentaire $[\Gamma]$; $[A]$ ne coupe aucun contour élémentaire; $[C_1]$ coupe $[\Gamma_1]$ au point a_1. Les points d'intersection successifs de S_1 avec les contours élémentaires sont donc a, a_1,... Adjoignons au contour en ces points les lignes ap, $a_1 p$,... suivant la méthode indiquée plus haut, puis décomposons S_1 en contours partiels. Celui de ces contours qui passe par a et a_1 est le suivant :

$$pap[A]pa_1 C_1 . a_1 p;$$

il ne se traverse pas lui-même, et la méthode indiquée le réduit aux deux suivants :

$$R = pap[A].pa_1 C_1^{-1} C_1 a_1 p \quad \text{et} \quad [C_1].$$

Le premier de ces deux contours est formé du contour A joint à des lignes pa et $pa_1 C_1$ qui sont parcourues deux fois de suite en sens contraires, et se réduit évidemment au contour $[A]$. Le contour partiel proposé se réduit donc à $[A][C_1]$: de même pour les autres. Donc le contour $S_1 = [C][A][C_1]$... est déjà réduit.

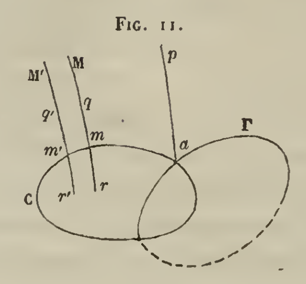
Nous allons établir en second lieu que la méthode de réduction donnée plus haut étant appliquée à deux contours quelconques réductibles l'un à l'autre donnera toujours le même contour réduit. En prouvant ce second point, nous aurons démontré notre proposition; car les contours S_1 et S'_1 étant tous deux réduits et différents, ne pourront être réductibles l'un à l'autre. D'ailleurs il suffira d'établir ce second point pour deux contours infiniment voisins l'un de l'autre, puisque deux contours étant réductibles l'un à l'autre, on pourra toujours, par définition, passer de l'un à l'autre par une suite de contours dont chacun sera infiniment voisin du précédent.

Soient donc M, M' deux contours infiniment voisins (*fig.* 11); appliquons-leur simultanément la méthode de réduction :

1° Si le contour M coupe l'un des contours $\frac{C,\ C_1,\dots,}{\Gamma,\ \Gamma_1,\dots,}$ C, par exemple,

en un point m autre que a, on le transforme par l'adjonction de la

Fig. 11.



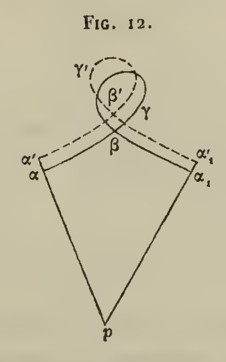
ligne ma en un contour $\ldots qmamr \ldots = M_1$ qui traverse C en a au lieu de le traverser en m : M' traversera en général C en un point m' infiniment voisin de m (nous examinerons tout à l'heure les cas d'exception), et l'adjonction de la ligne $m'a$ transformera $M' = \ldots q'm'r' \ldots$ en un contour $\ldots q'm'am'r' \ldots = M'_1$, qui traverse C en a, et qui sera partout infiniment voisin du contour M_1.

2° Soient α, α_1 deux points d'intersection successifs du contour M_1 avec les contours élémentaires; on peut admettre, d'après ce qui précède, que ces points sont situés respectivement sur les lignes pa, pa_1 : on pourra décomposer M_1 en contours partiels tels que $p\alpha\alpha_1 p$. Le contour M'_1, infiniment voisin de M_1, coupera en général les mêmes contours élémentaires en des points α', α'_1 infiniment voisins de α, α_1, et situés respectivement sur les mêmes lignes pa, pa_1, et la portion du contour M_1 comprise entre α et α_1 ne traversant nulle part les contours élémentaires, la portion de M'_1 comprise entre α' et α'_1, laquelle est infiniment voisine de la précédente, ne coupera en général nulle part les contours élémentaires. (Nous reviendrons tout à l'heure sur les cas d'exception.) Si donc on décompose M'_1 en contours partiels suivant la méthode indiquée, $p\alpha'\alpha'_1 p = N'$, infiniment voisin de $p\alpha\alpha_1 p = N$ sera l'un de ces contours.

3° Si le contour N se coupe lui-même en un point β (*fig.* 12), le contour voisin N' se coupe en général lui-même en un point β' infiniment voisin de β (nous reviendrons tout à l'heure sur les cas d'exception.) Le contour N étant alors décomposé dans les deux suivants, $p\alpha\beta\gamma\beta\alpha p$ et $p\alpha\beta\alpha_1 p$, la même méthode appliquée à N' le décomposera

en deux contours $p\alpha'\beta'\gamma'\beta'\alpha' p$ et $p\alpha'\beta'\alpha'_1 p$ infiniment voisins de ceux-là. Poursuivant cette réduction, de manière à décomposer N et N′ en contours partiels qui ne se traversent nulle part, on voit que chaque

Fig. 12.



contour partiel de N′ sera infiniment voisin du contour correspondant de N. D'ailleurs (sauf les cas d'exception sur lesquels nous reviendrons tout à l'heure), si N traverse en α ou en α_1 quelque contour élémentaire, N′ traversera le même contour, et réciproquement. Si donc on réduit N à

$$[\Gamma]^x[C]^y.RR_1^{-1}[C_1]^{-y_1}[\Gamma_1]^{-x_1}$$

par la méthode indiquée, la même méthode réduira N′ à

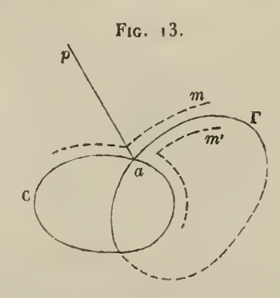
$$[\Gamma]^x[C]^y.R'R_1'^{-1}[C_1]^{-y_1}[\Gamma_1]^{-x_1},$$

$R'R_1'^{-1}$ étant un contour infiniment voisin de RR_1^{-1}, et qui, comme ce dernier, ne se traverse pas lui-même et ne traverse aucun contour élémentaire.

Notre démonstration sera achevée si nous démontrons que RR_1^{-1} et $R'R_1'^{-1}$ se réduisent nécessairement à un même système de contours élémentaires. En effet, soient ρ, ρ_1 et ρ', ρ'_1 les régions que ces contours déterminent respectivement dans la surface. Les deux régions correspondantes ρ et ρ' renferment les mêmes contours $A,\ldots,\begin{matrix}C,\ldots,\\ \Gamma,\ldots,\end{matrix}$; car si cela n'avait pas lieu, ces contours n'étant pas coupés par RR_1^{-1} ni par $R'R_1'^{-1}$, quelques-uns d'entre eux au moins seraient compris entre

deux. Cela est évidemment impossible pour A; car la surface étant limitée à ce contour, on ne peut y tracer aucune ligne de l'autre côté de celle-là. Quant aux contours C et Γ (*fig.* 13), soient m, m' deux

Fig. 13.



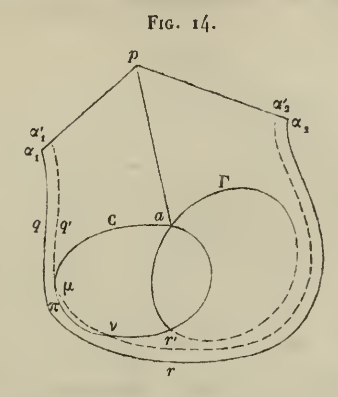
points infiniment voisins pris respectivement sur RR_1^{-1} et $R'R_1'^{-1}$, et supposés situés de part et d'autre de Γ, par exemple. Les deux contours ci-dessus étant infiniment voisins l'un de l'autre, seraient infiniment voisins du contour intermédiaire Γ. Cela peut bien se faire jusqu'en a; mais à partir de ce point, les deux contours considérés ne pouvant couper C comme le fait Γ, s'éloigneraient nécessairement de Γ et par suite l'un de l'autre, résultat inadmissible. Il est donc prouvé que les régions ρ et ρ' d'une part, ρ_1 et ρ_1' d'autre part, contiennent les mêmes contours élémentaires. Si donc ρ est celle des régions ρ, ρ_1 qui ne contient pas C et que l'on réduise RR_1^{-1} à un système formé des contours élémentaires qui limitent la région ρ, la même méthode, appliquée à $R'R_1'^{-1}$ le réduira au même système de contours.

Notre démonstration est donc terminée. Mais nous avons admis que si l'un des deux contours considérés M, M' se coupe lui-même, ou coupe un des contours élémentaires en un point quelconque, l'autre se coupera lui-même ou coupera le même contour élémentaire en un point infiniment voisin de celui-là. Cette hypothèse, vraie en général, souffre quelques cas d'exception que nous devons examiner.

Supposons en premier lieu qu'une portion qr du contour M ne traversant pas les contours élémentaires, la portion correspondante $q'r'$ de M' traverse C, par exemple (*fig.* 14). Si l'on déforme progressivement M pour le changer en M', qr en se déformant deviendra tangent à C avant de le couper, comme le fait $q'r'$: $q'r'$ coupe donc nécessairement C en deux points très voisins, μ et ν. Soit $p\alpha_1 qr\alpha_2 p$ le contour

partiel de M dont qr fait partie, la portion correspondante de M′ for-

Fig. 14.



mera les trois contours partiels

$$p\alpha'_1 q' \mu a p, \quad pa\mu\nu\pi\mu a p, \quad pa\mu\pi\nu\alpha'_2 p.$$

Le second de ces contours se décompose lui-même ainsi, d'après la méthode indiquée,

$$pa\mu\nu\pi\mu a p = [\Gamma]^{-1}.pa.\Gamma.a\mu\nu\pi\mu\, a.\Gamma^{-1}\, ap[\Gamma],$$

et a pour réduite un simple point; car le contour $pa.\Gamma.a\mu\nu\pi\mu a.\Gamma^{-1}ap$ formé des deux lignes infiniment rapprochées $pa.\Gamma.a\mu\nu$ et $a\mu\pi\nu\Gamma^{-1}ap$ et ne traversant aucun contour élémentaire se réduit à un simple point. Cette réduction faite, il reste les deux contours $[\Gamma]^{-1}$ et $[\Gamma]$ qui se détruisent.

Le contour $p\alpha'_1 q' \mu\nu r' \alpha'_2 p$ a donc même réduite que

$$p' \alpha'_1 q' \mu a p . pa\mu\pi\nu r' \alpha'_2 p,$$

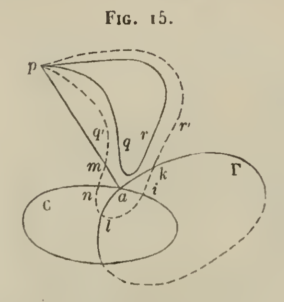
ou, en supprimant la ligne $pa\mu$ qui est décrite deux fois de suite en sens contraire, même réduite que

$$p' \alpha'_1 q' \mu\pi\nu r' \alpha'_2 p.$$

Ce dernier contour, infiniment voisin de M et ne traversant plus C, aura même réduite. Donc M et M′ ont même réduite.

Supposons maintenant que la portion qr de M ne coupe pas les contours [C] et [Γ] (*fig.* 15), mais soit très-voisine de a et que $q'r'$ passe

Fig. 15.



de l'autre côté de ce point. Les deux contours C, Γ et la ligne pa forment en ce point cinq angles pak, kai, ial, lan, nap, et qr est situé dans un de ces angles. Admettons, pour fixer les idées, que ce soit dans l'angle pak; $q'r'$ coupera successivement pa, C et Γ aux points m, n, l, i, k. Si l'on décompose maintenant M et M' en contours partiels, on aura dans l'expression de M', au lieu du contour partiel unique $pqrp$, les six contours partiels

$$pq'mp, \quad pmnap, \quad panlap, \quad paliap, \quad paikap, \quad pakr'p.$$

Or, il est aisé de voir que chacun de ces contours partiels, sauf le premier et le dernier, se réduit à un point. Prenons par exemple le contour $panlap$. Il se réduit par la méthode indiquée plus haut à

$$[\Gamma]^{-1}.pa.\Gamma.anla.\Gamma^{-1}.ap[\Gamma];$$

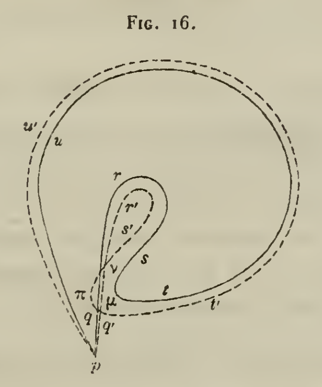
mais $pa.\Gamma.anla.\Gamma^{-1}.ap$, formé des deux lignes infiniment voisines $pa.\Gamma.anl$ et $la.\Gamma^{-1}.ap$ qui ne coupent aucun contour élémentaire, se réduit à un simple point; d'autre part, $[\Gamma]^{-1}$ et $[\Gamma]$ se détruisent : $panlap$ se réduit donc à un simple point.

Le contour M' a donc même réduite que $pq'mp.pmakr'p$, ou, en supprimant la ligne mp, même réduite que $pq'makr'p$; mais ce dernier contour, infiniment voisin de $pqrp$, et qui ne traverse plus les contours élémentaires, a la même réduite que $pqrp$.

En dernier lieu, supposons que deux portions du contour M, qr

et st (*fig.* 16) ne se traversant pas mutuellement, les portions correspondantes de M′, $q'r'$, $s't'$ se traversent. Lorsqu'on déformera M pour

Fig. 16.



obtenir M′, qr et st deviendront tangents l'un à l'autre, avant de prendre les positions $q'r'$, $s't'$, où ils se coupent : $q'r'$ et $s't'$ se couperont donc nécessairement en deux points voisins μ et ν. Cela posé, décomposons M par la méthode indiquée en contours partiels qui ne se traversent pas eux-mêmes. Si qr et st n'appartiennent pas au même contour partiel, on pourra décomposer M′ en contours partiels correspondants à ceux de M, et $q'r'$, $s't'$ appartiendront respectivement à deux contours partiels différents qui se couperont à la vérité en μ et ν; mais cette circonstance est indifférente. Il n'en est pas de même si qr et st appartiennent à un même contour partiel $pqrstup$. En effet, la portion correspondante de M′, $pq'r's't'u'p$, traitée par la méthode indiquée, ne se réduit plus à un seul contour partiel, mais au système des trois suivants :

$$pq'r's'\nu p, \quad pq'\nu\pi\mu p, \quad p\mu u'p.$$

Or le contour $pq'\nu\pi\mu p$, formé des deux lignes infiniment voisines $pq'\nu$ et $\nu\pi\mu p$ qui ne se coupent pas mutuellement, se réduit à un simple point. La réduite de M′ est donc la même que celle de

$$pq'r's'\nu p \,.\, p\mu u'p,$$

ou, en supprimant la ligne $p\mu$, la même que celle de $pq'r's'\nu\mu u'p$. Mais

ce dernier contour ne se traverse plus lui-même, et il est infiniment voisin de M : il a donc même réduite.

Notre démonstration est ainsi terminée, et nous pouvons conclure en énonçant le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Deux systèmes de contours élémentaires sont irréductibles, si après avoir remplacé dans l'expression de chacun d'eux les contours composés* $[\Gamma][C][\Gamma]^{-1}[C]^{-1} = \Delta$ *et* $[C][\Gamma][C]^{-1}[\Gamma]^{-1} = \Delta^{-1}$, *partout où ils se présentent, par leur expression en fonction des autres contours élémentaires, et supprimé tous les contours décrits deux fois de suite en sens contraire, ils ne sont pas formés des mêmes contours élémentaires décrits dans le même ordre.*

Remarque. — Si tout contour intérieur à la surface considérée la partageait en deux régions distinctes, il n'existerait aucun contour tel que $[C]$ ou $[\Gamma]$, et pour comparer deux systèmes de contours élémentaires, on éliminerait de leur expression les contours

$$[A] = \Delta \quad \text{et} \quad [A]^{-1} = \Delta^{-1}.$$

Enfin si de plus la surface était fermée, tout contour tracé sur elle se réduirait à un point.

Chalon-sur-Saône, janvier 1866.

SUR LES DEUX FORMES

$x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 6t^2$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Les deux formes indiquées

$$x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 6t^2$$

et

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2$$

sont aussi du nombre de celles qu'il est bon de considérer à la fois pour représenter un même entier n. En effet, quoiqu'il soit très-difficile peut-être d'obtenir une expression simple et générale de chacun des nombres séparés

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 6t^2)$$

et

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2)$$

de représentations qu'elles fournissent pour cet entier, on a cependant tout de suite la valeur de la somme suivante

$$4N(n = x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 6t^2)$$
$$+ 6N(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2).$$

Je me suis assuré par une démonstration facile que la valeur dont il s'agit est égale à celle de cette autre somme

$$N(3n = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2) + 9N[n = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2)]$$

dont les deux termes sont connus d'après ce que j'ai donné dans le

cahier de juillet 1861 au sujet de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2.$$

On remarquera que

$$\mathrm{N}[n = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2)] = 0$$

quand n n'est pas divisible par 3, tandis que pour n divisible par 3, ou pour $n = 3q$, l'on a

$$\mathrm{N}[n = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2)] = \mathrm{N}(q = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2).$$

Je laisse au lecteur à trouver la formule explicite qui résulte naturellement des considérations précédentes.

FUNÉRAILLES DE M. BOUR [*].

DISCOURS DE MM. RIFFAULT ET COURNOT.

(Extrait du *Moniteur universel*, 24 mars 1866.)

Ces jours derniers ont eu lieu au Val-de-Grâce les obsèques de M. Bour, Ingénieur des Mines, Professeur à l'École Polytechnique.

L'École Polytechnique tout entière, une députation du Corps impérial des Mines, des Membres de l'Institut, des représentants nombreux des divers services qui se recrutent à l'École, une foule empressée d'amis, étaient venus rendre les derniers devoirs au jeune Professeur enlevé si prématurément à la science.

Le corps a été déposé dans une chapelle provisoire, en attendant le jour fixé pour sa translation à Gray, ville natale de M. Bour, qui a revendiqué l'honneur de posséder sa dépouille mortelle.

Au milieu de l'émotion générale, le Colonel Riffault, Directeur des Études à l'École Polytechnique, a prononcé les paroles suivantes :

« Messieurs,

» C'est toujours un spectacle douloureux que de voir la mort frapper la jeunesse.

» Quelle qu'ait été la victime, la pensée se porte tout d'abord sur un père, sur une mère éplorés qui se sont vu ravir l'espoir et le soutien de leurs vieux jours et qui ne veulent point être consolés, parce que leur fils bien-aimé n'est plus.

» Combien l'émotion n'est-elle pas plus profonde quand à la douleur de la famille vient s'ajouter un deuil public, quand celui qui part

[*] M. Bour est mort le 9 mars, dans sa trente-quatrième année.

avant l'heure a déjà donné le droit de dire sur sa tombe : « Une grande » intelligence vient de s'éteindre! »

» Oui, Messieurs, vous le savez tous comme moi, Edmond Bour, dont nous accompagnons ici les restes mortels, était une grande et belle intelligence. Est-il besoin de citer ses premiers travaux, qui, dès le seuil de la jeunesse, ont en lui révélé un maître? Vous rappellerai-je l'éclatant témoignage d'estime que lui a décerné l'Institut, le glorieux échec qui lui marquait à l'avance une place assurée au sein de l'illustre assemblée, enfin sa nomination à l'une des chaires importantes de l'École Polytechnique? Mais ces souvenirs sont d'hier, car six ans à peine lui ont suffi pour conquérir une notoriété que d'autres, moins heureux, poursuivent en vain jusqu'aux limites de la vieillesse.

» Hier encore, jeunes camarades qui m'écoutez, vous étiez sous le charme de sa parole, vous demandant ce qu'il fallait le plus admirer en lui, le talent du Professeur ou le mérite du Savant.

» Tant de nobles facultés ont-elles donc disparu comme ces lueurs éphémères qui jettent un vif éclat et s'éteignent sans laisser aucune trace?

» Heureusement non, Messieurs, et c'est là, du moins, un puissant motif de consolation. Avant sa dernière heure, l'ami que nous pleurons a pu s'écrier avec le poëte : *Non omnis moriar.* Tandis que son âme plane dans les régions sereines, ses Œuvres, peu nombreuses mais excellentes, perpétueront son souvenir parmi nos futurs camarades; elles lui assureront à jamais une place distinguée parmi les esprits d'élite dont s'honorent la science, le pays et l'École Polytechnique. »

M. Cournot, Recteur honoraire, a pris ensuite la parole et s'est exprimé en ces termes :

« Messieurs,

» Il y a quelques années à peine que le doyen de nos Académies, le vénérable M. Biot, terminait sa longue et glorieuse carrière, et comme il tenait à remettre en de jeunes et vaillantes mains ce qu'il regardait avec raison comme une arme du plus haut prix, cet exem-

plaire des *Mémoires de Berlin* qui avait été l'exemplaire de Lagrange lui-même, il prit conseil de ses confrères les plus autorisés, et il le destina à Edmond Bour, au jeune lauréat qui venait de remporter le grand prix de Mathématiques de l'Académie des Sciences, qui avait été classé le premier, sans hésitation aucune, pendant toute la durée de ses deux années de cours à l'École Polytechnique, qui se trouvait à vingt-huit ans revêtu du titre de Professeur dans cette grande institution, et pour ainsi dire au seuil de l'Académie. Hélas! jeunes gens qui m'écoutez et qui êtes venus rendre un pieux devoir à ce maître dont vous étiez fiers comme de l'un des vôtres, tant son âge le rapprochait de vous, vous voyez de bonne heure, dans ce touchant exemple des jeux cruels de la destinée, combien il faut se hâter, si l'on est de ceux qui se sentent capables de laisser après eux une trace durable de leur passage sur la terre, quelque chose qui, en conservant leur mémoire, accroisse le dépôt de ces hautes connaissances, le plus digne, le plus impérissable objet des efforts de l'homme. Dans sa vie si courte, notre ami a suffisamment montré qu'il était de ce nombre. Ainsi l'ont décidé des juges trop compétents pour que nous puissions craindre de céder aux illusions de l'amitié, et, si j'osais le dire, à celles d'une tendresse paternelle. A peine sorti des écoles, la vocation scientifique d'Edmond Bour, qui semblait incertaine, tant il s'appliquait avec un égal succès à tous les genres d'études, se prononce pour les Mathématiques, et de prime abord ses recherches se portent sur ces parties élevées de la Mécanique rationnelle, qui ne sont pour ainsi dire plus de la Mécanique, tant le raisonnement s'y abstrait, s'y généralise, de manière qu'un théorème de Dynamique soit en même temps la solution d'un problème d'Analyse, constitue un moyen de calcul et d'intégration. Il perce dans cette voie que Lagrange a ouverte, où Jacobi et Hamilton se sont avancés, où d'autres plus heureux le suivront sans le faire oublier, malgré l'interruption de son œuvre. En même temps qu'il éclaire d'un jour nouveau ces régions supérieures de la science, et quoique atteint déjà du mal qui l'a tué, il n'oublie point ses devoirs de Professeur; il rédige son *Cours de Mécanique*, dont la première partie seulement, le *Cours de Cinématique*, vient de paraître sous sa forme définitive, mais dont il est permis d'espérer que la publication se continuera, grâce au zèle pieux d'un ami. Ainsi, de maître en maître,

les parties mêmes de la science qu'on pouvait croire fixées et presque vieillies vont sans cesse en se rajeunissant. Un mot heureux créé par Ampère a suffi pour changer l'enseignement de la Mécanique, en y faisant plus nettement distinguer ce qui est du ressort de la Géométrie, et ce qui suppose des notions d'un autre ordre, ce qui se complique des données de l'observation. On a franchement reconnu l'indépendance de la Cinématique, non peut-être sans lui passer parfois quelques empiétements. Notre ami aura utilement pris part à ce travail de rénovation didactique, pour lequel les facultés inventives ne sont pas de trop, même quand il semble qu'on n'ait plus qu'à arranger.

» De vifs applaudissements, de solides et flatteuses récompenses sont venus bien vite, il faut le reconnaître, encourager le talent qui s'annonçait ainsi, et dont les premiers succès en promettaient tant d'autres.

» Un instant on a pu croire qu'il allait recevoir une consécration encore plus solennelle. Faut-il s'étonner maintenant si ce qui n'était pour ses amis, pour tout le monde, qu'une partie remise, lui a paru être une partie perdue? Hélas! nous avons tous nos tristes pressentiments, et quelque chose apparemment lui disait trop bien qu'il n'avait pas le loisir d'attendre, qu'il était de ceux qui n'assistent qu'un jour au banquet de la vie.

» Combien n'a-t-il fallu que ses généreux protecteurs se hâtassent, pour qu'une autre récompense vînt le trouver à sa dernière heure, et presque à titre de récompense posthume!

» Excusez-moi, Messieurs, d'avoir pris ici la parole pour dire ce que vous sentez comme moi, ce que vous savez bien mieux que moi. On a pensé que ce devoir regardait l'ami d'enfance de ce vieux père qui tout à l'heure pleurait devant vous, le compatriote qui sait avec quelle touchante unanimité de regrets une ville entière ressent la perte de celui qu'elle regardait avec orgueil comme le mieux doué de ses enfants. Au nom de tant d'amis désolés et épars, adieu, cher Edmond! »

SUR LE MOUVEMENT

D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE;

Par M. Th. DIEU,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

Quand les forces qui agissent sur le corps ont une résultante passant par le point fixe, on a les équations

$$(1)\quad A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=0,\quad B\frac{dq}{dt}+(A-C)pr=0,\quad C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=0.$$

Nous supposerons que A est le plus petit et C le plus grand des trois moments d'inertie principaux.

Des deux intégrales

$$(2)\qquad Ap^2+Bq^2+Cr^2=h,\quad A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=k^2,$$

on déduit

$$k^2-Ah=B(B-A)q^2+C(C-A)r^2,$$
$$k^2-Ch=-A(C-A)p^2-B(C-B)q^2;$$

k^2 doit donc être $>Ah$ et $<Ch$, la rotation autour d'un axe permanent étant exclue.

Tirant des intégrales (2) les valeurs de p, q en fonction de r et les portant dans la dernière des équations (1), on obtient

$$dt=\pm\frac{C\sqrt{AB}.dr}{\sqrt{k^2-Bh-C(C-B)r^2}\sqrt{Ah-k^2+C(C-A)r^2}}.$$

Premier cas : $k^2<Bh$. — Posant

$$\frac{k^2-Ah}{C(C-A)}=a^2,\quad\frac{Bh-k^2}{C(C-B)}=b^2,$$

il vient

$$dt = \pm \sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}} \frac{dr}{\sqrt{(b^2+r^2)(a^2-r^2)}}.$$

D'après cette expression de dt, on doit toujours avoir $-a < r < a$, ce qui conduit à poser

$$r = a\cos\lambda,$$

λ étant une variable auxiliaire. De cette hypothèse il résulte

$$\frac{dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = \pm d\lambda, \quad b^2 + r^2 = (a^2+b^2)\left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\lambda\right);$$

par suite on a

$$\text{(I)} \qquad dt = \pm \frac{n\,d\lambda}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\lambda}},$$

en posant

$$\sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{ABC}{(B-A)(Ch-k^2)}} = n$$

et

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} \quad \text{ou} \quad \frac{C-B}{B-A}\,\frac{k^2-Ah}{Ch-k^2} = \gamma^2.$$

Supposons p_0 et q_0 de même signe : r décroît d'abord et va de r_0 à $-a$, puis devient croissant et va de $-a$ à $+a$, etc. λ_0 désignant la valeur de λ entre 0 et π tirée de $\cos\lambda = \frac{r_0}{a}$, on aura $r = -a$ pour $\lambda = \pi$, puis $r = a$ pour $\lambda = 2\pi$, etc.; il faudra donc toujours prendre le signe supérieur dans la formule (I), en sorte que

$$t = n\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\lambda}}.$$

Soit $r_0 > 0$; on aura $\lambda_0 < \frac{\pi}{2}$. La durée du passage de $r = r_0$ à $r = -a$ sera

$$n\int_{\lambda_0}^{\pi} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\lambda}} = n[2F(\gamma) - F(\gamma, \lambda_0)],$$

et celle des passages de $r=-a$ à $r=a$, de $r=a$ à $r=-a$, etc.,

$$n\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\lambda}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\lambda}}=2n\mathrm{F}(\gamma).$$

On a

$$\mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{A})p^2=\mathrm{C}(\mathrm{C}-\mathrm{B})(b^2+r^2),$$
$$\mathrm{B}(\mathrm{B}-\mathrm{A})q^2=\mathrm{C}(\mathrm{C}-\mathrm{A})(a^2-r^2);$$

donc p ne peut passer par zéro et doit toujours garder le signe de p_0, tandis que q devient au contraire nul pour $r=-a$, puis pour $r=a$, et doit à chaque fois changer de signe afin que le signe de dr change [dernière des équations (1)].

Les composantes p, q, r de la vitesse de rotation reprennent périodiquement les mêmes valeurs respectives pour des valeurs de λ en progression de raison égale à 2π; ces valeurs de λ répondent à des valeurs de t formant une progression dont la raison est $4n\mathrm{F}(\gamma)$.

Angles d'Euler. — D'après la formule $\cos\theta=\frac{\mathrm{C}r}{k}$, en partant de $t=n[2\mathrm{F}(\gamma)-\mathrm{F}(\gamma,\lambda_0)]$, θ variera depuis la valeur entre o et π donnée par $\cos\theta=-\frac{\mathrm{C}a}{k}$, jusqu'à celle qui est donnée par $\cos\theta=\frac{\mathrm{C}a}{k}$, et *vice versâ*. D'après

$$\sin\varphi\sin\theta=\frac{\mathrm{A}p}{k},\quad \cos\varphi\sin\theta=\frac{\mathrm{B}q}{k},$$

φ ne peut croître ni décroître indéfiniment, puisque p n'est jamais nul; cet angle est égal à $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ (selon que p_0, q_0 sont positifs ou négatifs) quand on a $r=\mp a$, et varie toujours entre les valeurs équidifférentes de $\frac{\pi}{2}$ répondant à $r=0$.

Les angles φ et θ reprennent périodiquement les mêmes valeurs en même temps que p, q, r.

De l'équation

$$d\psi=dt\cdot\frac{k(h-\mathrm{C}r^2)}{k^2-\mathrm{C}^2r^2}$$

on déduit

$$\frac{C}{nk}d\psi = \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\lambda}} + \frac{C-A}{A}\frac{d\lambda}{(1+m^2\sin^2\lambda)\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\lambda}},$$

en posant

$$\frac{C(k^2-Ah)}{A(Ch-k^2)} = m^2.$$

La valeur initiale de ψ étant ψ_0, on a donc

$$\psi = \psi_0 + \frac{k}{C}t + \frac{nk}{C}\cdot\frac{C-A}{A}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{(1+m^2\sin^2\lambda)\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\lambda}}.$$

Jusqu'à l'instant où

$$t = n[F(\gamma) - F(\gamma, \lambda_0)],$$

l'intégrale est exprimée par

$$\Pi(\gamma, m^2, \lambda) - \Pi(\gamma, m^2, \lambda_0);$$

jusqu'à celui où

$$t = n[2F(\gamma) - F(\gamma, \lambda_0)],$$

elle est ensuite exprimée par

$$2\Pi(\gamma, m^2) - \Pi(\gamma, m^2, \lambda_0) - \Pi(\gamma, m^2, \pi - \lambda), \text{ etc.}$$

On voit que ψ augmente de

$$\frac{2nk}{C}\left[F(\gamma) + \frac{C-A}{A}\Pi(\gamma, m^2)\right]$$

pendant des intervalles de temps successifs égaux à $2nF(\gamma)$, à partir de l'instant où r atteint pour la première fois la valeur $-a$.

L'angle ψ varie toujours dans le même sens. Ses valeurs forment une progression par différence pour des valeurs de t croissant par degrés égaux à $4nF(\gamma)$ à partir d'un instant quelconque, et pour lesquelles θ et φ, ainsi que p, q, r, reprennent périodiquement les mêmes valeurs.

La discussion serait absolument la même si l'on supposait r_0 négatif avec p_0, q_0 de même signe, ou p_0, q_0 de signes contraires avec r_0 positif ou négatif.

Second cas : $k^2 > Bh$. — Posant

$$\frac{k^2 - Ah}{C(C-A)} = a^2, \quad \frac{k^2 - Bh}{C(C-B)} = c^2,$$

il vient

$$dt = \pm \sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}} \frac{dr}{\sqrt{(a^2-r^2)(r^2-c^2)}}.$$

Des inégalités $Ch - k^2 > 0$, $B > A$, on déduit $a^2 > c^2$. On doit donc toujours avoir $c^2 < r^2 < a^2$, c'est-à-dire

$$-a < r < -c, \text{ si } r_0 \text{ est négatif,}$$
$$c < r < a, \quad \text{ si } r_0 \text{ est positif.}$$

Cela conduit à poser

$$r^2 - c^2 = (a^2 - c^2)\cos^2\mu,$$

μ désignant une variable auxiliaire. D'après cela,

$$\frac{dr}{\sqrt{(a^2-r^2)(r^2-c^2)}} = -\frac{d\mu}{r}, \quad r = \pm\sqrt{a^2 - (a^2-c^2)\sin^2\mu};$$

on a donc

$$\text{(II)} \qquad dt = \pm \frac{n'\,d\mu}{\sqrt{1-\gamma'^2\sin^2\mu}},$$

en posant

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{ABC}{(C-B)(k^2-Ah)}} = n'$$

et

$$\frac{a^2-c^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad \frac{B-A}{C-B}\cdot\frac{Ch-k^2}{k^2-Ah} = \gamma'^2.$$

Supposons p_0, q_0 de signes contraires et r_0 positif; r croît d'abord

de r_0 à a, puis décroît de a à c, etc. Soit $-\mu_0$ la valeur de μ entre $-\frac{\pi}{2}$ et o qui est donnée par $\cos\mu = \frac{r_0^2 - c^2}{a^2 - c^2}$, on aura $r = a$ pour $\mu = 0$, $r = c$ pour $\mu = \frac{\pi}{2}$, etc.; il faudra donc toujours prendre le signe supérieur dans la formule (II), en sorte que

$$t = n' \int_{-\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \gamma'^2 \sin^2\mu}}.$$

D'après cela : 1° la durée du passage de $r = r_0$ à $r = a$ est $n' F(\gamma', \mu_0)$; 2° celles des passages de $r = a$ à $r = c$ et des passages inverses sont toutes égales à $n' F(\gamma')$; 3° la durée de la période est le double $2n' F(\gamma')$, au moins pour r.

On a

$$A(B - A)p^2 = C(C - B)(r^2 - c^2),$$
$$B(B - A)q^2 = C(C - A)(a^2 - r^2);$$

donc q est nul pour $r = a$ et p pour $r = c$. D'ailleurs le signe de p, de même que celui de q, doit changer à chaque passage par zéro, afin que dr change de signe [dernière des équations (1)]

Les composantes p, q, r reprennent périodiquement les mêmes valeurs pour des valeurs de t croissant par degrés égaux à $4n' F(\gamma')$ à partir d'un instant quelconque.

Angles d'Euler. — On conclut de $\cos\theta = \frac{Cr}{k}$, que θ doit toujours rester entre o et $\frac{\pi}{2}$ quand r_0 est positif, et par suite r entre a et c. A partir de $t = n' F(\gamma', \mu_0)$, θ variera depuis la valeur donnée par $\cos\theta = \frac{Ca}{k}$, jusqu'à la valeur plus grande donnée par $\cos\theta = \frac{Cc}{k}$, et *vice versâ*. D'après

$$\sin\varphi \sin\theta = \frac{Ap}{k}, \quad \cos\varphi \sin\theta = \frac{Bq}{k},$$

l'angle φ est égal à un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ pour $r = a$, et à un multiple de π pour $r = c$, puisque q est nul pour $r = a$ et p pour $r = c$; cet

angle n'est donc pas limité, au contraire de ce qui a lieu dans le premier cas. Par une discussion minutieuse, on voit qu'il décroît indéfiniment lorsque p_0, q_0 sont de signes contraires, comme on l'a supposé. Enfin ses valeurs pour des valeurs de t en progression de raison égale à $2n'\,\mathrm{F}(\gamma')$ en forment une de raison égale à π.

L'angle θ reprend périodiquement les mêmes valeurs en même temps que p, q, r, tandis que φ varie de 2π dans un certain sens, toujours le même.

L'équation

$$d\psi = dt\,\frac{k(h - \mathrm{C}r^2)}{k^2 - \mathrm{C}^2 r^2}$$

devient

$$\frac{\mathrm{C}}{n'k}\,d\psi = \frac{d\mu}{\sqrt{1-\gamma'^2\sin^2\mu}} + \frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{A}}\,\frac{d\mu}{(1+m'^2\sin^2\mu)\sqrt{1-\gamma'^2\sin^2\mu}},$$

en posant

$$\frac{\mathrm{C}(\mathrm{B}-\mathrm{A})}{\mathrm{A}(\mathrm{C}-\mathrm{B})} = m'^2.$$

Si l'on désigne encore par ψ_0 la valeur initiale de ψ, on a

$$\psi = \psi_0 + \frac{k}{\mathrm{C}}\,t + \frac{n'k}{\mathrm{C}}\cdot\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{A}}\int_{-\mu_0}^{\mu}\frac{d\mu}{(1+m'^2\sin^2\mu)\sqrt{1-\gamma'^2\sin^2\mu}}.$$

Jusqu'à l'instant où

$$t = n'\,\mathrm{F}(\gamma', \mu_0),$$

l'intégrale est exprimée par

$$\Pi(\gamma', m'^2, \mu_0) - \Pi(\gamma', m'^2, -\mu);$$

jusqu'à celui où

$$t = n'[\mathrm{F}(\gamma', \mu_0) + \mathrm{F}(\gamma')],$$

elle est ensuite exprimée par

$$\Pi(\gamma', m'^2, \mu_0) + \Pi(\gamma', m'^2, \mu), \text{ etc.}$$

Ainsi l'angle ψ croît constamment de $\frac{n'k}{C}\left[F(\gamma') + \frac{C-A}{C}\Pi(\gamma', m'^2)\right]$ pendant des intervalles de temps successifs égaux à $n'F(\gamma')$.

L'angle ψ varie toujours dans le même sens, et ses valeurs forment une progression de raison égale à $\frac{4n'k}{C}\left[F(\gamma') + \frac{C-A}{C}\Pi(\gamma', m'^2)\right]$ pour des valeurs de t en progression de raison égale à $4n'F(\gamma')$, tandis que p, q, r, θ reprennent périodiquement les mêmes valeurs et que φ prend des valeurs en progression de raison égale à 2π.

La discussion se fait tout à fait de la même manière quand on suppose p_0, q_0 de signes contraires et r_0 négatif, ou p_0, q_0 de même signe et r_0 positif ou négatif.

La différence la plus remarquable entre le premier cas et le second consiste en ce que l'angle φ n'est pas limité dans celui-ci, tandis qu'il oscille, pour ainsi dire, entre deux valeurs fixes dans l'autre.

DÉMONSTRATIONS DE QUELQUES THÉORÈMES

CONCERNANT

LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION $x^2 - Ny^2 = -1$

(Suite [*]);

Par M. Casimir RICHAUD.

---

42. Recherchons les conclusions auxquelles on peut arriver sur la possibilité en valeurs entières de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2A_1 A_2 \ldots A_{2s-1} B_1 B_2 \ldots B_{2t-1} PQ y^2 = -1$$

lorsque les quantités $\left(\frac{PQ}{A_1}\right), \left(\frac{PQ}{A_2}\right), \ldots, \left(\frac{PQ}{B_{2t-1}}\right)$ considérées (n° **41**) sont toutes négatives, et lorsque les facteurs premiers $8n+5$ qui entrent dans le déterminant de l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2A_1 A_2 \ldots A_{2s-1} B_1 B_2 \ldots B_{2t-1} y^2 = -1$$

se partagent en deux groupes $A_1, \ldots, A_{2s-1}$ et $B_1, \ldots, B_{2t-1}$ composés chacun d'un nombre impair de termes satisfaisant aux conditions suivantes (a), dans lesquelles les signes supérieurs des seconds membres marchent ensemble, ainsi que les signes inférieurs

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{A_1}{P}\right) = \left(\frac{A_2}{P}\right) = \ldots = \left(\frac{A_{2s-1}}{P}\right) = \left(\frac{B_1}{Q}\right) = \left(\frac{B_2}{Q}\right) = \ldots = \left(\frac{B_{2t-1}}{Q}\right) = \pm 1, \\ &\left(\frac{A_1}{Q}\right) = \left(\frac{A_2}{Q}\right) = \ldots = \left(\frac{A_{2s-1}}{Q}\right) = \left(\frac{B_1}{P}\right) = \left(\frac{B_2}{P}\right) = \ldots = \left(\frac{B_{2t-1}}{P}\right) = \mp 1. \end{aligned} \right.$$

Imaginons à cet effet que les équations de condition (α_2) relatives à l'équation (2) soient divisées en trois séries analogues à celles des théo-

---

[*] *Voir* au volume précédent, page 235.

rèmes (nos 36 et 38), et représentées par les types suivants :

1re série...... (3_2) $A_d\ldots A_f B_g\ldots B_k h^2 - 2A_g\ldots B_l PQH'^2 = \pm 1$,

2e série...... (4_2) $A_l\ldots A_k B_f\ldots B_\alpha P h^2 - 2A_f\ldots B_d QH'^2 = \pm 1$,

3e série...... (5_2) $A_f\ldots A_t B_\alpha\ldots B_k PQ h^2 - 2A_g\ldots A_\alpha B_g\ldots B_l H'^2 = \pm 1$.

On reconnaît de suite, en vertu des conditions (a), que toutes les relations de la deuxième série sont impossibles en valeurs entières de h et de H′. Le nombre total de facteurs premiers $8n+5$ qui entrent dans les coefficients de h^2 et de H'^2 est en effet pair (n° 15); les facteurs de de l'un des deux groupes, du groupe $A_1, \ldots, A_{2s-1}$ par exemple, entrent donc en nombre impair au coefficient de h^2, tandis que le même coefficient contient un nombre pair de facteurs premiers de l'autre groupe. Dans cette hypothèse, le coefficient de H'^2 contiendra au contraire un nombre pair de facteurs premiers du premier groupe $A_1, \ldots, A_{2s-1}$, et un nombre impair de facteurs premiers de l'autre groupe. Nous aurons par suite les relations

$$\left(\frac{A_l\ldots A_k}{Q}\right) = \left(\frac{A_l}{Q}\right); \quad \left(\frac{B_f\ldots B_\alpha}{Q}\right) = 1,$$

$$\left(\frac{2A_f\ldots}{P}\right) = -1; \quad \left(\frac{\ldots B_d}{P}\right) = \left(\frac{B_d}{P}\right) = \left(\frac{A_l}{Q}\right)$$

en observant que $\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{Q}{P}\right)$, ces relations fournissent les égalités

$$\left(\frac{A_l\ldots A_k B_f\ldots B_\alpha P}{Q}\right) = \left(\frac{A_l P}{Q}\right); \quad \left(\frac{2A_f\ldots B_d Q}{P}\right) = -\left(\frac{A_l P}{Q}\right),$$

en vertu desquelles on reconnait que les équations de condition de la deuxième série représentées par le type (4_2) sont impossibles en valeurs entières de h et de H′.

Les équations de condition de la première série, dans lesquelles les facteurs premiers des deux groupes entrent en nombre impair au coefficient de h^2, sont aussi impossibles en valeurs entières de h et de H′. Dans cette hypothèse, les conditions (a) donnent en effet les relations

$$\left(\frac{A_d\ldots A_f}{P}\right) = \left(\frac{A_d}{P}\right); \quad \left(\frac{B_g\ldots B_k}{P}\right) = \left(\frac{B_g}{P}\right),$$

d'où

$$\left(\frac{A_d \ldots A_f B_g \ldots B_k}{P}\right) = \left(\frac{A_d B_g}{P}\right) = -1;$$

égalité qui prouve, pour le cas considéré, l'impossibilité en valeurs entières des équations de condition représentées par le type (3_2). Cette conséquence est évidemment applicable à l'équation de condition particulière

$$(6_2) \qquad A_1 \ldots A_{2s-1} B_1 \ldots B_{2t-1} h^2 - 2PQH'^2 = \pm 1.$$

En ce qui concerne les équations de condition de la troisième série, l'impossibilité en valeurs entières se constaterait d'une manière analogue pour toutes celles qui contiendraient au coefficient de h^2 un nombre impair de facteurs premiers de chacun des deux groupes. Dans ces conditions en effet les facteurs des groupes $A_1, \ldots, A_{2s-1}$ et $B_1, \ldots, B_{2t-1}$ entreront en nombre pair au coefficient de H'^2. Nous aurons donc les relations

$$\left(\frac{A_g \ldots A_\alpha}{P}\right) = \left(\frac{B_g \ldots B_l}{P}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{2 A_g \ldots A_\alpha B_g \ldots B_l}{P}\right) = -1,$$

dont la dernière prouve, dans le cas particulier, l'impossibilité des équations de condition du type (5_2) en valeurs entières de h et de H'.

L'équation particulière de cette série

$$(7_2) \qquad PQh^2 - 2A_1 \ldots A_{2s-1} B_1 \ldots B_{2t-1} H'^2 = \pm 1$$

est dans le même cas, à cause de la relation $\left(\frac{PQ}{A_1}\right) = -1$.

Ainsi, en résumé, *lorsqu'on aura à rechercher la possibilité de l'équation* (2) *en valeurs entières de x et de y, dans les conditions qui ont été définies, il suffira de se préoccuper des équations de condition des première et troisième séries qui contiendraient au coefficient de h^2 un nombre pair de facteurs premiers de chacun des groupes* $A_1, \ldots, A_{2s-1}$ *et* $B_1, \ldots, B_{2t-1}$. On pourra même négliger l'équation particulière (7_2) qui contient au coefficient de H'^2 un nombre impair de facteurs premiers de chacun des mêmes groupes.

En représentant par n et n' les nombres impairs de facteurs premiers qui entrent respectivement dans chacun des groupes A_1, A_2,... et B_1, B_2,..., on reconnaîtra de suite que le nombre total des équations de condition dont on aura encore à se préoccuper, sera représenté par

$$2(2^{n+n'-2}-1)=2^{m-3}-2,$$

m désignant le nombre de facteurs premiers qui entrent dans le déterminant de l'équation (2).

En ce qui concerne ces dernières équations des première et troisième séries, leur impossibilité en valeurs entières ne pourra s'établir que dans les cas où l'on préciserait certaines conditions auxquelles devraient satisfaire les facteurs premiers qui entrent dans le déterminant de l'équation (1). Il est toutefois facile de reconnaître que, si l'équation (2) admet des valeurs entières pour certains assemblages de signe des quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$,... provenant des facteurs premiers du déterminant de l'équation (1), la même équation (2) sera également possible en entiers pour les assemblages qu'on obtiendrait en changeant le signe des mêmes quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$,.... Les seules équations de condition qu'on aurait à considérer, d'après ce qui précède, contiendraient en effet aux coefficients de h^2 et de H'^2 un nombre pair de facteurs premiers du déterminant de l'équation (1). Il est évident dès lors que si ces équations (α_2) n'admettent pas de valeurs entières de h et de H' pour certains assemblages de signe des quantités précitées $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$,..., on arrivera à la même conséquence lorsque le signe de toutes ces quantités sera changé.

Cela posé, nous allons procéder à la recherche de conditions spéciales de possibilité de l'équation (2), en commençant par quelques cas particuliers.

45. Partons de l'équation

$$(1) \qquad x^2-2ABy^2=-1,$$

et, en supposant que les conditions

$$(a)\qquad \left(\frac{A}{C}\right)=\left(\frac{B}{D}\right)=+1;\quad \left(\frac{A}{D}\right)=\left(\frac{B}{C}\right)=-1,$$

dans lesquelles les signes des deuxièmes membres peuvent être permutés, soient remplies, recherchons les conclusions auxquelles on pourra arriver sur la possibilité en valeurs entières de l'équation

$$(2)\qquad x^2-2\text{ABCD}y^2=-1,$$

qui contient quatre facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ dans son déterminant.

Il ressort de ce qui a été établi (n° **42**) que les six équations de condition (α_2) sont impossibles en valeurs entières de h et de H'. Cette conséquence est en effet évidente pour les équations (α_2) qui contiennent C et D à des coefficients différents. De plus les deux équations de condition

$$(3_2)\qquad \text{AB}h^2-2\text{CDH}'^2=\pm 1,$$
$$(4_2)\qquad \text{CD}h^2-2\text{ABH}'^2=\pm 1$$

sont dans le même cas, puisque la première renferme au coefficient de h^2 un nombre impair de facteurs premiers de chacun des groupes A et B, et puisque la deuxième correspond à l'équation (7_2) considérée (n° **42**). On peut remarquer d'ailleurs que, pour $m=4$, le nombre des équations de condition $2^{m-3}-2$ est égal à zéro.

Par suite, en observant que les égalités (a) équivalent aux conditions

$$(a_1)\qquad \left(\frac{AB}{C}\right)=\left(\frac{AB}{D}\right)=\left(\frac{CD}{A}\right)=\left(\frac{CD}{B}\right)=-1,$$

nous arrivons à la proposition suivante : *Si ces dernières conditions* (a_1) *sont satisfaites, l'équation* $x^2-2\text{ABCD}y^2=-1$ *admet toujours des solutions entières.*

44. Le théorème précédent rapproché de ceux qui ont été démontrés (n^{os} **30** et **36**) permet de déterminer dès à présent tous les arrangements de signe des six quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$,... pour lesquels on peut

affirmer que l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2ABCD\,y^2 = -1,$$

qui contient quatre facteurs premiers $8n+5$ dans son déterminant, admet des solutions entières.

On a vu (nº 35) que le nombre total de ces arrangements de signe est égal à $2^{\frac{4.3}{2}} = 64$. Or, si (nº 30) $\left(\frac{A}{B}\right)$ restant arbitraire, les cinq quantités analogues sont égales à $+1$, l'équation (1) admet toujours des solutions entières. Ainsi, comme la quantité $\left(\frac{A}{B}\right)$ peut être successivement permutée avec les cinq quantités analogues, nous aurons six ou plutôt sept assemblages pour lesquels on pourra affirmer la possibilité de l'équation considérée en valeurs entières. Ces assemblages sont pour l'un les six quantités positives, et, pour les six suivants, cinq quantités positives jointes à une sixième négative. En général (nº 31) si le déterminant renfermait m facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ combinés avec le facteur 2, on aurait $\frac{m(m-1)}{2} + 1$ assemblages de signe des quantités $\left(\frac{A}{B}\right), \left(\frac{A}{C}\right), \cdots$ pour lesquels on pourrait affirmer que l'équation correspondante admet des solutions entières. Dans le cas de m pair, ce nombre d'assemblages pourrait même être doublé (nº 34) par le changement de signe de toutes les quantités qui entrent dans chacun d'eux. Pour l'équation (1) on est donc déjà certain que quatorze assemblages assurent la possibilité en valeurs entières.

Pour déterminer l'ensemble de ceux qui sont dans ce cas, rappelons (nº 36) que, quels que soient les signes de $\left(\frac{A}{B}\right)$ et de $\left(\frac{C}{D}\right)$, l'équation (1) est toujours possible en valeurs entières, lorsque

$$\left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{A}{D}\right) = \left(\frac{B}{D}\right) = \pm 1,$$

ou, ce qui revient au même, lorsque

$$(a) \qquad \left(\frac{AB}{C}\right) = \left(\frac{AB}{D}\right) = \left(\frac{CD}{A}\right) = \left(\frac{CD}{B}\right) = 1;$$

mais, comme dans ces égalités (a) les facteurs premiers A, B, C, D peuvent être permutés, l'équation (1) sera aussi possible en entiers dans chacun des deux cas suivants :

$$(b)\qquad \left(\frac{AC}{B}\right)=\left(\frac{AC}{D}\right)=\left(\frac{BD}{A}\right)=\left(\frac{BD}{C}\right)=1,$$

$$(c)\qquad \left(\frac{AD}{B}\right)=\left(\frac{AD}{C}\right)=\left(\frac{BC}{A}\right)=\left(\frac{BC}{D}\right)=1.$$

Les égalités (a) comprennent huit assemblages de signe des six quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$, ..., savoir

$$\left(\frac{A}{C}\right)=\left(\frac{B}{C}\right)=\left(\frac{A}{D}\right)=\left(\frac{B}{D}\right)=\pm 1\begin{cases}\left(\frac{A}{B}\right)=\left(\frac{C}{D}\right)=\pm 1 & \text{(4 assemblages)},\\ \left(\frac{A}{B}\right)=-\left(\frac{C}{D}\right) & \text{(4 assemblages)}.\end{cases}$$

De même, chacune des égalités (b) et (c) fournirait huit assemblages; mais les deux suivants

$$\left(\frac{A}{B}\right)=\left(\frac{A}{D}\right)=\left(\frac{B}{C}\right)=\left(\frac{C}{D}\right)=\left(\frac{A}{C}\right)=\left(\frac{B}{D}\right)=\pm 1,$$

qui dérivent de ces égalités (b) et (c), sont déjà compris dans ceux qui provenaient des égalités (a), de telle sorte que, en réalité, les conditions (a), (b) et (c) ne produisent que vingt assemblages de signe des six quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$, ... pour lesquels on peut affirmer la possibilité de l'équation (1) en valeurs entières.

Cela posé, rappelons aussi (n° **43**) que, quels que soient les signes de $\left(\frac{A}{B}\right)$ et de $\left(\frac{C}{D}\right)$, l'équation (1) est possible en nombres entiers, lorsque

$$(a_1)\qquad \left(\frac{AB}{C}\right)=\left(\frac{AB}{D}\right)=\left(\frac{CD}{A}\right)=\left(\frac{CD}{B}\right)=-1,$$

et subsidiairement dans chacun des cas suivants,

$$(b_1)\qquad \left(\frac{AC}{B}\right)=\left(\frac{AC}{D}\right)=\left(\frac{BD}{A}\right)=\left(\frac{BD}{C}\right)=-1,$$

$$(c_1)\qquad \left(\frac{AD}{B}\right)=\left(\frac{AD}{C}\right)=\left(\frac{BC}{A}\right)=\left(\frac{BC}{D}\right)=-1.$$

Ces trois séries d'égalités produiraient comme ci-dessus vingt-quatre assemblages de signe des six quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$, ..., pour lesquels on pourra affirmer la possibilité de l'équation (1) en valeurs entières. Mais on constaterait facilement d'une part que ces vingt-quatre assemblages se réduisent à dix-huit réellement distincts entre eux, et d'autre part que, parmi ces dix-huit derniers, six rentrent dans ceux qui provenaient des conditions (a), (b), (c). Les douze assemblages à éliminer sont :

1° Les quatre provenant de (a_1) pour lesquels $\left(\frac{A}{B}\right)=\left(\frac{C}{D}\right)=\pm 1$,

2° Les quatre provenant de (b_1) pour lesquels $\left(\frac{A}{C}\right)=\left(\frac{B}{D}\right)=\pm 1$,

3° Les quatre provenant de (c_1) pour lesquels $\left(\frac{A}{D}\right)=\left(\frac{B}{C}\right)=\pm 1$.

Ainsi en résumé les égalités (a), (b), (c) et (a_1), (b_1), (c_1) fournissent trente-deux assemblages de signe distincts entre eux, pour lesquels la méthode suivie permet d'affirmer que l'équation (1) admet des solutions entières.

Nous arrivons ainsi à la proposition suivante :

Théorème. — *L'équation* $x^2 - 2ABCDy^2 = -1$, *dans laquelle* A, B, C, D *représentent des facteurs premiers* $8n+5$, *admet toujours des solutions entières dans chacun des cas suivants :*

$$1^\circ \text{ Si } \left(\frac{AB}{C}\right)=\left(\frac{AB}{D}\right)=\left(\frac{CD}{A}\right)=\left(\frac{CD}{B}\right),$$

$$2^\circ \text{ Si } \left(\frac{AC}{B}\right)=\left(\frac{AC}{D}\right)=\left(\frac{BD}{A}\right)=\left(\frac{BD}{C}\right),$$

$$3^\circ \text{ Si } \left(\frac{AD}{B}\right)=\left(\frac{AD}{C}\right)=\left(\frac{BC}{A}\right)=\left(\frac{BC}{D}\right).$$

45. *Remarque.* — Les équations de condition inscrites (n° **50**) permettraient de constater *à posteriori* que l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2ABCDy^2 = -1$$

admet des solutions entières dans chacun des trois cas qui viennent

d'être spécifiés. Mais, sans nous arrêter à ce détail, nous allons établir que ces trois séries d'égalités comprennent bien tous les cas pour lesquels la méthode suivie permet d'affirmer que l'équation (1) admet des valeurs entières.

On sait en effet (nº **41**) que, dans chacun des deux cas

$$(m) \qquad \left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = 1, \qquad \left(\frac{A}{D}\right) = \left(\frac{B}{D}\right) = -1;$$

$$(n) \qquad \left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = -1, \qquad \left(\frac{A}{D}\right) = \left(\frac{B}{D}\right) = +1,$$

qui sont compris l'un et l'autre dans les égalités

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{AB}{C}\right) = \left(\frac{AB}{D}\right) = \left(\frac{2CD}{A}\right) = \left(\frac{2CD}{B}\right) = 1,$$

on ne peut rien affirmer sur la possibilité de l'équation (1) en valeurs entières.

On sait aussi (nº **39**) qu'il en est de même dans les cas

$$(p) \qquad \left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{A}{D}\right) = 1, \qquad \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{B}{D}\right) = -1;$$

$$(q) \qquad \left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{A}{D}\right) = -1, \qquad \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{B}{D}\right) = 1$$

qui sont compris tous deux dans les égalités

$$(\alpha_1) \qquad \left(\frac{AB}{C}\right) = \left(\frac{AB}{D}\right) = \left(\frac{2CD}{A}\right) = \left(\frac{2CD}{B}\right) = -1.$$

Or, il est évident que, dans les égalités (α) et (α_1), les facteurs premiers A, B, C, D peuvent être permutés. Par suite, en vertu de la méthode suivie, on ne peut rien affirmer sur la possibilité de l'équation (1) en valeurs entières dans chacun des trois cas suivants :

1º $\quad$ Si $\left(\frac{AB}{C}\right) = \left(\frac{AB}{D}\right) = \left(\frac{2CD}{A}\right) = \left(\frac{2CD}{B}\right)$;

2º $\quad$ Si $\left(\frac{AC}{B}\right) = \left(\frac{AC}{D}\right) = \left(\frac{2BD}{A}\right) = \left(\frac{2BD}{C}\right)$;

3º $\quad$ Si $\left(\frac{AD}{B}\right) = \left(\frac{AD}{C}\right) = \left(\frac{2BC}{A}\right) = \left(\frac{2BC}{D}\right)$.

On constaterait, comme ci-dessus (n° **44**), que ces égalités correspondent à trente-deux assemblages de signe des six quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$,..., de telle sorte que, sur un nombre total de soixante-quatre assemblages, l'équation (1) admet toujours des valeurs entières pour trente-deux d'entre eux, tandis que, par la méthode suivie, on n'arrive à aucune conclusion précise pour les trente-deux autres. On se rappelle (n° **29**) qu'un partage analogue par moitié a été déterminé pour l'équation

$$x^2 - 2ABCy^2 = -1.$$

Les conditions inscrites dans l'énoncé du théorème (n° **44**) comprennent donc tous les cas pour lesquels la méthode permet d'affirmer la possibilité de l'équation (1) en valeurs entières. Ces conditions peuvent être remplacées par les suivantes qui, conformément à ce qui sera ultérieurement démontré, sont susceptibles d'être étendues aux équations analogues dans lesquelles le déterminant contiendrait m facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ combinés avec le facteur 2. L'équation (1) admet en effet des solutions entières dans chacun des sept cas suivants :

	Nombre d'assemblages de signe pour	
	m quelconque.	$m = 4$.
1° Si les quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, ··· sont toutes positives.	1	1
2° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = -1$, les quantités analogues étant toutes positives.	$\frac{m(m-1)}{2}$	6
3° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = -1$, les autres quantités étant positives. . . .	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2}$	12
4° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = \left(\frac{D}{A}\right) = -1$, les autres quantités étant positives	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.4}$	3
5° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = \left(\frac{D}{A}\right) = \left(\frac{C}{A}\right) = -1$ ou si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = \left(\frac{D}{A}\right) = \left(\frac{D}{B}\right) = -1$, les autres quantités étant positives. .	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.4}$	6
6° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = \left(\frac{D}{A}\right) = \left(\frac{C}{A}\right) = \left(\frac{D}{B}\right) = -1$, les autres quantités étant positives .	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$	1
7° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = -1$, les autres quantités étant positives.	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.4}$	3
Total pour $m = 4$		32

De même on peut substituer aux conditions (α), (β) et (γ) inscrites ci-dessus, relativement aux trente-deux assemblages pour lesquels la méthode ne permet pas d'affirmer que l'équation (1) admet des solutions entières, les conditions suivantes qui sont aussi applicables à une équation qui contiendrait m facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ dans son déterminant. On ne peut rien affirmer sur la possibilité de l'équation (1) en valeurs entières dans chacun des quatre cas suivants :

	Nombre d'assemblages de signe pour m quelconque.	$m = 4$.
1° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = -1$, les quantités analogues étant toutes positives...	$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}$	12
2° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{C}{A}\right) = -1$, les autres quantités étant positives......	$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$	4
3° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{A}{D}\right) = -1$, les autres quantités étant positives......	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$	4
4° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{A}{D}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = -1$, les autres quantités étant positives.	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2}$	12
Total pour $m = 4$.........		32

46. D'après la forme des conditions relatives à la possibilité en valeurs entières de l'équation $x^2 - 2ABCDy^2 = -1$, inscrites (n° **44**), on voit que si cette équation est possible pour certains assemblages de signe des six quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$,..., elle admettra aussi des solutions entières pour les assemblages qu'on obtiendrait en changeant le signe des six quantités précitées. Cette propriété n'est pas particulière à l'équation considérée; elle s'étend à toutes les équations analogues qui renferment un nombre pair de facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ combinés avec le facteur 2 dans leur déterminant. Les équations de condition relatives à ces équations contiennent en effet (n^{os} **15** et **31**) un nombre pair de facteurs premier à chacun des coefficients de h^2 et de H'^2, ce qui suffit pour conduire à la proposition énoncée.

47. Après cette digression sur l'équation

$$x^2 - 2ABCDy^2 = -1,$$

considérons encore un cas particulier de l'équation générale exa-

minée (nº **42**). En partant de l'équation

(1) $$x^2 - 2ABCDy^2 = -1,$$

recherchons les conclusions auxquelles on pourra arriver pour la possibilité en valeurs entières de l'équation

(2) $$x^2 - 2ABCDEFy^2 = -1,$$

en supposant remplies les conditions suivantes

(a) $$\left(\frac{A}{E}\right)=\left(\frac{B}{E}\right)=\left(\frac{C}{E}\right)=\left(\frac{D}{F}\right)=1,\quad \left(\frac{A}{F}\right)=\left(\frac{B}{F}\right)=\left(\frac{C}{F}\right)=\left(\frac{D}{E}\right)=-1$$

dans lesquelles les signes des seconds membres peuvent être permutés.

L'équation (2) renfermant six facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ dans son déterminant, le nombre total des équations de condition (α_2) sera égal à $2^{6-1}-2=30$ (nº **31**). Mais il suffira (nº **42**) de se préoccuper de $2^{6-3}-2=6$ équations, savoir :

(α_2) $$\begin{cases} ABh^2 - 2CDEFH'^2 = \pm 1, \\ ACh^2 - 2BDEFH'^2 = \pm 1, \\ BCh^2 - 2ADEFH'^2 = \pm 1, \\ ABEFh^2 - 2CDH'^2 = \pm 1, \\ ACEFh^2 - 2BDH'^2 = \pm 1, \\ BCEFh^2 - 2ADH'^2 = \pm 1. \end{cases}$$

Or, si nous bornant à considérer les quatre facteurs premiers du déterminant de l'équation (1), nous joignons aux conditions (a) l'une quelconque des conditions suivantes :

(a_1) $$\left(\frac{A}{B}\right)=\left(\frac{B}{C}\right)=-1,$$

(a_2) $$\left(\frac{A}{B}\right)=\left(\frac{B}{C}\right)=\left(\frac{C}{A}\right)=-1,$$

(a_3) $$\left(\frac{A}{B}\right)=\left(\frac{A}{C}\right)=\left(\frac{A}{D}\right)=-1,$$

(a_4) $$\left(\frac{A}{B}\right)=\left(\frac{A}{C}\right)=\left(\frac{A}{D}\right)=\left(\frac{B}{C}\right)=-1$$

[les quantités analogues complémentaires $\left(\frac{B}{D}\right)\cdots$ étant positives dans

chacun des quatre cas], conditions en vertu desquelles (n° 45) on ne peut pas affirmer la possibilité de cette équation (1) en valeurs entières, il sera facile de reconnaître que les équations (α_2) sont impossibles en valeurs entières de h et de H'.

Nous aurons en effet les six relations

$$\left(\frac{2\,\mathrm{CDEF}}{\mathrm{B}}\right)=\left(\frac{2\,\mathrm{BDEF}}{\mathrm{C}}\right)=\left(\frac{2\,\mathrm{ADEF}}{\mathrm{B}}\right)=\left(\frac{\mathrm{ABEF}}{\mathrm{D}}\right)=\left(\frac{\mathrm{ACEF}}{\mathrm{D}}\right)=\left(\frac{\mathrm{BCEF}}{\mathrm{D}}\right)=-1,$$

d'après lesquelles les première, deuxième,..., sixième équations de condition (α_2) ne peuvent pas admettre de valeurs entières pour h et H', dans le cas où les égalités (a) sont satisfaites, soit en même temps que les conditions (a_1), soit avec les conditions (a_2).

On arrivera à la même conséquence lorsque les conditions (a) seront ajoutées soit aux égalités (a_3), soit aux égalités (a_4). Les égalités (a_3) peuvent en effet se mettre sous la forme

$$(a_3)\qquad \left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}\right)=\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}\right)=\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right)=1,\ \text{les quantités analogues étant négatives,}$$

d'où, en tenant compte des permutations qu'on peut faire subir aux facteurs premiers A, B, C, D, il résulte que ces égalités (a_3) dérivent des égalités (a_2) par le changement de signe des six quantités qui entrent dans l'une de ces égalités (a_2). Les égalités (a_4) dérivent d'une manière analogue des conditions (a_1). Dès lors on peut affirmer (n° 42) que les équations de condition (α_2) sont impossibles en valeurs entières de h et de H', lorsque les conditions (a) seront réunies soit aux égalités (a_3), soit aux égalités (a_4).

Pour compléter ce qui précède, il reste à établir que, si les conditions (a) sont satisfaites en même temps que l'une des trois égalités

$$1^\circ\qquad \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{C}}\right)=\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{D}}\right)=\left(\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{A}}\right)=\left(\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{B}}\right),$$

$$2^\circ\qquad \left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{B}}\right)=\left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{D}}\right)=\left(\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{A}}\right)=\left(\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{C}}\right),$$

$$3^\circ\qquad \left(\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{B}}\right)=\left(\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{C}}\right)=\left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{A}}\right)=\left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{D}}\right),$$

qui expriment (n° 44) que l'équation (1) admet toujours des solutions

entières, on ne pourra arriver à aucune conclusion précise sur la possibilité de l'équation (2) en valeurs de même nature.

La démonstration étant la même dans les divers cas, bornons-nous à en considérer un seul, celui des égalités

$$\left(\frac{AB}{C}\right) = \left(\frac{AB}{D}\right) = \left(\frac{CD}{A}\right) = \left(\frac{CD}{B}\right) = 1;$$

nous aurons dans cette hypothèse

$$\left(\frac{AB}{C}\right) = \left(\frac{AB}{D}\right) = \left(\frac{2CDEF}{A}\right) = \left(\frac{2CDEF}{B}\right) = 1,$$

égalités qui prouvent que la première des équations de condition (α_2) peut admettre des valeurs entières, ou, en d'autres termes, que l'équation (2) peut être impossible en valeurs de même nature.

Ces résultats nous conduisent à la proposition suivante, dans laquelle les facteurs premiers A, B, C et D qui entrent dans les égalités (a) peuvent être permutés deux à deux, et dans laquelle aussi un ou deux facteurs premiers de l'équation (1) peuvent être permutés soit avec E ou F, soit avec E et F.

Théorème. — *L'équation* $x^2 - 2ABCDEF y^2 = -1$ *qui contient six facteurs premiers* $8n+5$ *dans son déterminant admet toujours des solutions entières lorsque les conditions*

$$(a)\quad \left(\frac{A}{E}\right) = \left(\frac{B}{E}\right) = \left(\frac{C}{E}\right) = \left(\frac{D}{F}\right) = \pm 1; \quad \left(\frac{A}{F}\right) = \left(\frac{B}{F}\right) = \left(\frac{C}{F}\right) = \left(\frac{D}{E}\right) = \mp 1,$$

dans lesquelles les signes supérieurs des seconds membres marchent ensemble ainsi que les signes inférieurs, sont satisfaites, et lorsque de plus l'une des conditions suivantes (α), (β) *ou* (γ) *se trouve également satisfaite*

$$(\alpha)\qquad \left(\frac{AB}{C}\right) = \left(\frac{AB}{D}\right) = \left(\frac{2CD}{A}\right) = \left(\frac{2CD}{B}\right),$$

$$(\beta)\qquad \left(\frac{AC}{B}\right) = \left(\frac{AC}{D}\right) = \left(\frac{2BD}{A}\right) = \left(\frac{2BD}{C}\right),$$

$$(\gamma)\qquad \left(\frac{AD}{B}\right) = \left(\frac{AD}{C}\right) = \left(\frac{2BC}{A}\right) = \left(\frac{2BC}{D}\right).$$

48. *Remarque.* — Il résulte aussi de la discussion précédente que,

dans l'hypothèse où les égalités (a) sont vérifiées, on ne peut rien affirmer sur la possibilité de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2\,\text{ABCDEF}\,y^2 = -1,$$

lorsque les conditions inscrites dans le théorème (n° **44**) sont satisfaites, ou, en d'autres termes, lorsque l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2\,\text{ABCD}\,y^2 = -1$$

admet forcément des solutions entières.

On peut remarquer encore que les conditions (a) du théorème (n° **47**) peuvent être remplacées par les suivantes

$$\left(\frac{\text{AB}}{\text{E}}\right) = \left(\frac{\text{AB}}{\text{F}}\right) = \left(\frac{2\,\text{EF}}{\text{A}}\right) = \left(\frac{2\,\text{EF}}{\text{B}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\text{CD}}{\text{E}}\right) = \left(\frac{\text{CD}}{\text{F}}\right) = \left(\frac{\text{EF}}{\text{C}}\right) = \left(\frac{\text{EF}}{\text{D}}\right) = -1,$$

en vertu desquelles l'équation $x^2 - 2\,\text{CDEF}\,y^2 = -1$ admet toujours des solutions entières, tandis qu'on ne peut rien affirmer sur la possibilité de l'équation $x^2 - 2\,\text{ABEF}\,y^2 = -1$ en valeurs de même nature.

Le théorème (n° **47**) peut d'ailleurs être généralisé de la manière suivante :

49. Théorème. — *L'équation*

$$(2) \qquad x^2 - 2\,\text{A}_1\text{A}_2\ldots\text{A}_{2s-1}\text{B}_1\text{B}_2\ldots\text{A}_{2t-1}\,\text{PQ}\,y^2 = -1$$

considérée (n° **42**) *admet toujours des solutions entières, lorsque les conditions*

$$(a) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\text{A}_1}{\text{P}}\right) = \left(\frac{\text{A}_2}{\text{P}}\right) = \ldots = \left(\frac{\text{A}_{2s-1}}{\text{P}}\right) = \left(\frac{\text{B}_1}{\text{Q}}\right) = \left(\frac{\text{B}_2}{\text{Q}}\right) = \ldots = \left(\frac{\text{B}_{2t-1}}{\text{Q}}\right) = \pm 1, \\ \left(\frac{\text{A}_1}{\text{Q}}\right) = \left(\frac{\text{A}_2}{\text{Q}}\right) = \ldots = \left(\frac{\text{A}_{2s-1}}{\text{Q}}\right) = \left(\frac{\text{B}_1}{\text{P}}\right) = \left(\frac{\text{B}_2}{\text{P}}\right) = \ldots = \left(\frac{\text{B}_{2t-1}}{\text{P}}\right) = \mp 1, \end{cases}$$

sont satisfaites, et lorsque de plus les facteurs premiers $8n+5$ *qui entrent dans le déterminant de l'équation*

$$(1) \qquad x^2 - 2\,\text{A}_1\text{A}_2\ldots\text{A}_{2s-1}\text{B}_1\text{B}_2\ldots\text{B}_{2t-1}\,y^2 = -1$$

satisfont à l'une quelconque des quatre conditions suivantes (b_1), (b_2),

(b_3), (b_4)

$$(b_1)\quad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)=\left(\frac{A_2}{A_3}\right)=\ldots=\left(\frac{A_{2s-1}}{B_1}\right)=\left(\frac{B_1}{B_2}\right)=\ldots=\left(\frac{B_{2t-3}}{B_{2t-2}}\right)=\pm 1,$$

$$(b_2)\quad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)=\left(\frac{A_2}{A_3}\right)=\ldots=\left(\frac{A_{2s-1}}{B_1}\right)=\ldots=\left(\frac{B_{2t-3}}{B_{2t-2}}\right)=\left(\frac{B_{2t-2}}{A_1}\right)=\pm 1,$$

$$(b_3)\quad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)=\left(\frac{A_1}{A_3}\right)=\ldots=\left(\frac{A_1}{A_{2s-1}}\right)=\left(\frac{A_1}{B_1}\right)=\ldots=\left(\frac{A_1}{B_{2t-1}}\right)=\pm 1,$$

$$(b_4)\quad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)=\left(\frac{A_1}{A_3}\right)=\ldots=\left(\frac{A_1}{A_{2s-1}}\right)=\ldots=\left(\frac{A_1}{B_{2t-1}}\right)=\left(\frac{A_f}{A_g}\right)=\pm 1,$$

le signe des quantités analogues complémentaires $\left(\frac{A_k}{B_l}\right), \cdots$ *étant contraire à celui des deuxièmes membres des égalités* (b_1), (b_2), (b_3), (b_4).

1° *Cas des égalités* (b_1). — On sait (n° 42) qu'il suffit de se préoccuper des équations de condition des première et troisième séries qui contiennent au coefficient de h^2 un nombre pair de facteurs premiers de chacun des groupes $A_1 \ldots A_{2s-1}$ et $B_1 \ldots B_{2t-1}$.

Cela posé, il est facile de constater en premier lieu que toutes les équations de condition de la troisième série, dans lesquelles le produit PQ des deux facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ P et Q entre au coefficient de h^2, sont impossibles en valeurs entières de h et de H'.

Suivant la place occupée par le facteur premier B_{2t-1}, le seul qui n'entre pas dans les égalités (b_1), ces équations de condition se ramènent en effet aux deux types suivants :

$$A_\alpha \ldots B_{2t-1} PQ h^2 - 2 A_\beta \ldots B_\gamma H'^2 = \pm 1,$$
$$A_\delta \ldots B_\lambda PQ h^2 - 2 A_\alpha \ldots B_{2t-1} H'^2 = \pm 1,$$

et comme, en vertu des égalités (b_1), on a

$$\left(\frac{2A_\beta \ldots B_\gamma}{B_{2t-1}}\right) = -1, \quad \left(\frac{A_\alpha \ldots B_\lambda PQ}{B_{2t-1}}\right) = -1,$$

ces équations ne peuvent pas admettre de valeurs entières pour h et H'.

Il suffit donc de considérer les équations de condition de la première série, dans lesquelles le produit PQ entre au coefficient de H'^2.

Parmi ces équations, toutes celles qui contiennent A_1 et A_2 à des coefficients différents sont impossibles en valeurs entières de h et de H'. Elles se ramènent en effet aux deux types

$$(5_2)\qquad A_1\ldots A_\alpha B_6\ldots B_\gamma h^2 - 2A_2\ldots A_6 B_\alpha\ldots B_\delta PQH'^2 = \pm 1,$$

$$(6_2)\qquad A_2\ldots A_\alpha B_6\ldots B_\gamma h^2 - 2A_1\ldots A_6 B_\alpha\ldots B_\delta PQH'^2 = \pm 1,$$

et l'impossibilité dont il vient d'être parlé est prouvée par les relations

$$\left(\frac{2A_2\ldots A_6 B_\alpha\ldots B_\delta PQ}{A_1}\right) = -1,\quad \left(\frac{A_2\ldots A_\alpha B_6\ldots B_\gamma}{A_1}\right) = -1.$$

On reconnaîtra d'une manière analogue : 1° que les équations qui contiendraient A_1 et A_2, sans A_3, au même coefficient, seraient aussi impossibles en valeurs entières; 2° que celles qui contiendraient au même coefficient le produit $A_1 A_2 A_3$, sans le facteur premier A_4, seraient dans le même cas; et ainsi de suite jusqu'aux équations dans lesquelles tous les facteurs du groupe $A_1\ldots A_{2s-1}$ entreraient au coefficient de H'^2, puisque (n° **42**) on n'a pas à se préoccuper de celles qui contiendraient tous les facteurs de ce groupe au coefficient de h^2.

Il ne reste donc plus à examiner que les équations de condition qui ne contiennent aucun facteur du groupe $A_1, A_2\ldots$ au coefficient de h^2. Celles qui contiennent B_1 audit coefficient de h^2 et qui sont représentées par le type

$$(7_2)\qquad B_1\ldots B_\alpha h^2 - 2A_1 A_2\ldots A_{2s-1} B_6\ldots B_\gamma PQH'^2 = \pm 1$$

sont impossibles en valeurs entières de h et de H' à cause de la relation $\left(\frac{B_1\ldots B_\alpha}{A_{2s-1}}\right) = -1$. Il suffit donc de se préoccuper des équations qui contiennent B_1 au coefficient de H'^2.

En ce qui concerne ces dernières équations, on constatera comme ci-dessus : 1° que celles qui contiennent B_2 au coefficient de h^2 sont impossibles en valeurs entières de h et de H'; 2° que celles qui contiennent le produit $B_1 B_2$ sans le facteur B_3 au coefficient de H'^2 sont dans le même cas; et ainsi de suite jusqu'à l'équation

$$B_{2t-2}B_{2t-1}h^2 - 2A_1 A_2\ldots A_{2s-1} B_1 B_2\ldots B_{2t-3} PQH'^2 = \pm 1.$$

Or cette dernière est également impossible en valeurs entières de h et de H′, à cause de la relation $\left(\frac{B_{2t-2}B_{2t-1}}{B_{2t-3}}\right) = -1$. Le premier cas du théorème est donc démontré.

2° *Cas des égalités* (b_2). — Les égalités (b_2) ne diffèrent des égalités (b_1) que par le changement de signe de l'expression $\left(\frac{B_{2t-2}}{A_1}\right)$. Par cela même, en vertu de la démonstration précédente, on n'a pas à considérer les équations de condition de la troisième série, ni celles de la première série qui contiennent A_1 et B_{2t-2} au même coefficient. Il suffit donc d'examiner les deux types suivants :

$$(8_2)\qquad A_1\ldots A_\alpha B_\beta\ldots B_\gamma h^2 - 2A_\gamma\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_{2t-2}PQH'^2 = \pm 1,$$

$$(9_2)\qquad A_\alpha\ldots A_\beta B_\beta\ldots B_{2t-2}h^2 - 2A_1\ldots A_\gamma B_\alpha\ldots B_\gamma PQH'^2 = \pm 1.$$

En considérant d'abord l'équation (8_2), on reconnaît, d'après l'égalité $\left(\frac{2A_\gamma\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_{2t-2}PQ}{A_1}\right) = -1$, qu'elle n'admet pas de valeurs entières pour h et H′, pourvu que A_2 entre au coefficient de h^2.

Si A_2 entre au contraire au coefficient de H'^2, cette même équation (8_2) se divise en deux autres suivant la place occupée par A_3,

$$(8_3)\qquad A_1A_3\ldots A_\alpha B_\beta\ldots B_\gamma h^2 - 2A_2\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_{2t-2}PQH'^2 = \pm 1,$$

$$A_1\ldots A_\alpha B_\beta\ldots B_\gamma h^2 - 2A_2A_3\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_{2t-2}PQH'^2 = \pm 1.$$

La dernière de ces équations est impossible en valeurs entières de h et de H′, en vertu de la relation $\left(\frac{A_1\ldots A_\alpha A_\beta\ldots B_\gamma}{A_3}\right) = -1$. L'équation (8_3) se divisera de même en deux autres suivant la place occupée par A_4, et ainsi de suite, de telle sorte que, en négligeant successivement les équations dont l'impossibilité en valeurs entières de h et de H′ serait constatée comme ci-dessus, on passera par une série d'équations telles que

$$(8_4)\qquad A_1A_3\ldots A_\alpha B_\beta\ldots B_\gamma h^2 - 2A_2A_4\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_{2t-2}PQH'^2 = \pm 1,$$

$$(8_5)\qquad A_1A_3A_5\ldots A_\alpha B_\beta\ldots B_\gamma h^2 - 2A_2A_4\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_{2t-2}PQH'^2 = \pm 1,$$

. . . . ,

(8_n) $A_1 A_3 \ldots A_{2s-1} B_\varepsilon \ldots B_\gamma h^2 - 2 A_2 A_4 \ldots A_{2s-2} B_\alpha \ldots B_{2t-2} PQH'^2 = \pm 1,$

(8_{n+1}) $A_1 A_3 \ldots A_{2s-1} B_2 \ldots B_\gamma h^2 - 2 A_2 A_4 \ldots A_{2s-2} B_\alpha \ldots B_{2t-2} PQH'^2 = \pm 1,$

. . . . ,

(8_p) $A_1 A_3 \ldots A_{2s-1} B_2 B_4 \ldots B_{2t-4} h^2 - 2 A_2 A_4 \ldots A_{2s-2} B_1 B_3 \ldots B_{2t-2} PQH'^2 = \pm 1.$

En examinant successivement ces équations, on reconnaîtra que l'équation (8_4) n'admettra pas de valeurs entières lorsque A_5 entrera au coefficient de H'^2, et ainsi de suite jusqu'à l'équation (8_n), laquelle (n° **42**) ne pourra admettre de valeurs entières que dans le cas de s pair. Mais, dans ce cas de s pair, on passera à l'équation (8_{n+1}) en tenant compte de la place occupée par B_1, et ainsi de suite jusqu'à l'équation (8_p), qui ne peut pas admettre de valeurs entières en vertu de la relation $\left(\frac{A_1 . A_3 \ldots B_{2t-1}}{B_{2t-3}}\right) = -1$. La place occupée par le facteur B_{2t-1} dans l'équation (8_p) n'est pas indiquée; mais on reconnaît facilement, au moyen des égalités (b_2), que cette place n'influe pas sur la conséquence qui vient d'être signalée.

Un raisonnement similaire est applicable aux équations représentées par le type (9_2). Les équations successives que l'on aurait à considérer seraient

(9_3) $A_2 A_\alpha \ldots A_\varepsilon B_\varepsilon \ldots B_{2t-2} h^2 - 2 A_1 \ldots A_\gamma B_\alpha \ldots B_\delta PQH'^2 = \pm 1,$

. . . .

(9_n) $A_2 A_4 \ldots A_{2s-2} B_\varepsilon \ldots B_{2t-2} h^2 - 2 A_1 A_3 \ldots A_{2s-1} \ldots \ldots B_\delta PQH'^2 = \pm 1,$

. . . .

$$(9_p) \left\{ \begin{array}{l} A_2 A_4 \ldots A_{2s-2} B_1 B_3 \ldots B_{2t-3} B_{2t-2} h^2 \\ \qquad - 2 A_1 A_3 \ldots A_{2s-1} B_2 B_4 \ldots B_{2t-4} PQH'^2 = \pm 1. \end{array} \right.$$

Le théorème est donc démontré pour le cas des égalités (b_2).

3° *Cas des égalités* (b_3). — Les équations de condition de chacune des première et troisième séries se divisent en deux types suivant la place occupée par A_1 :

$$1^{\text{re}} \text{ série.} \left\{ \begin{array}{l} A_1 \ldots A_\alpha B_\gamma \ldots B_\delta h^2 - 2 A_\varepsilon \ldots A_\delta B_\alpha \ldots B_\varepsilon PQH'^2 = \pm 1, \\ A_\alpha \ldots A_\varepsilon B_\gamma \ldots B_\delta h^2 - 2 A_1 \ldots A_\delta B_\alpha \ldots B_\varepsilon PQH'^2 = \pm 1, \end{array} \right.$$

$$3^{\text{e}} \text{ série.} \left\{ \begin{array}{l} A_1 \ldots A_\alpha B_\gamma \ldots B_\delta PQ h^2 - 2 A_\varepsilon \ldots A_\delta B_\alpha \ldots B_\varepsilon H'^2 = \pm 1, \\ A_\alpha \ldots A_\varepsilon B_\gamma \ldots B_\delta PQ h^2 - 2 A_1 \ldots A_\delta B_\alpha \ldots B_\varepsilon H'^2 = \pm 1. \end{array} \right.$$

Or, d'après les égalités (b_3), nous avons les relations

$$\left(\frac{A_1\ldots A_\alpha B_\gamma\ldots B_\delta}{A_\varepsilon}\right)=-1,\qquad \left(\frac{2A_1\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_\varepsilon PQ}{A_\varepsilon}\right)=-1,$$

$$\left(\frac{2A_\varepsilon\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_\varepsilon}{A_1}\right)=-1,\qquad \left(\frac{A_\alpha\ldots A_\delta B_\gamma\ldots B_\delta PQ}{A_1}\right)=-1,$$

qui prouvent l'impossibilité en valeurs entières de h et de H' des équations de condition représentées par les quatre types inscrits ci-dessus. Le théorème est donc démontré dans ce troisième cas.

4° *Cas des égalités* (b_4). — Il résulte de la démonstration du cas précédent que les équations de condition de la troisième série sont aussi impossibles en valeurs entières de h et de H' dans le cas des égalités (b_4). Il est clair en effet que les deux relations en vertu desquelles cette impossibilité a été établie ci-dessus ne cesseront pas d'être exactes lorsqu'on ajoutera aux égalités (b_3) l'égalité supplémentaire $\left(\frac{A_f}{A_g}\right)=\pm 1$, ou plutôt lorsqu'on changera le signe de cette dernière quantité. Il suffit donc d'examiner les équations de condition de la première série. Suivant la place occupée par A_f et A_g, ces équations sont représentées par le type suivant :

$$A_f\ldots B_\alpha h^2-2A_g\ldots B_\varepsilon PQH'^2=\pm 1,$$

lequel, en vertu de la relation $\left(\frac{A_f\ldots B_\alpha}{A_g}\right)=-1$ dérivant des égalités (b_4), ne peut pas admettre de valeurs entières pour h et H'. On constate d'ailleurs que, en raison de la symétrie, il est inutile de considérer le type

$$A_g\ldots B_\alpha h^2-2A_f\ldots B_\varepsilon PQH'^2=\pm 1.$$

Le théorème est donc démontré.

50. Les facteurs premiers $8n+5$ qui entrent dans le déterminant de l'équation

$$(2)\qquad x^2-2A_{2s}A_{2s-1}\ldots A_{2t+1}A_{2t}B_{2t-1}\ldots B_2B_1PQy^2=-1$$

satisfaisant aux conditions

$$(a)\quad \begin{cases} \left(\frac{A_{2s}}{P}\right)=\left(\frac{A_{2s-1}}{P}\right)=\ldots=\left(\frac{A_{2t}}{P}\right)=\left(\frac{B_{2t-1}}{Q}\right)=\ldots=\left(\frac{B_2}{Q}\right)=\left(\frac{B_1}{Q}\right)=\pm 1, \\ \left(\frac{A_{2s}}{Q}\right)=\left(\frac{A_{2s-1}}{Q}\right)=\ldots=\left(\frac{A_{2t}}{Q}\right)=\left(\frac{B_{2t-1}}{P}\right)=\ldots=\left(\frac{B_2}{P}\right)=\left(\frac{B_1}{P}\right)=\mp 1, \end{cases}$$

considérées ci-dessus, recherchons les conclusions auxquelles on pourra arriver sur la possibilité en valeurs entières de cette équation (2), lorsque les égalités (b_1) ou (b_2)... inscrites (n° 49) seront remplacées par l'une des deux suivantes :

$$(b_5)\quad \left(\frac{A_{2s}}{A_{2s-1}}\right)=\left(\frac{A_{2s-1}}{A_{2s-2}}\right)=\ldots=\left(\frac{A_{2t}}{B_{2t-1}}\right)=\ldots=\left(\frac{B_3}{B_2}\right)=\left(\frac{B_2}{B_1}\right),$$

$$(b_6)\quad \left(\frac{A_{2s}}{A_{2s-1}}\right)=\left(\frac{A_{2s-1}}{A_{2s-2}}\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\left(\frac{B_3}{B_2}\right)=\left(\frac{B_2}{B_1}\right)=\left(\frac{B_1}{A_{2s}}\right)$$

[le signe des quantités analogues complémentaires $\left(\frac{A_{2s}}{A_k}\right)\cdots$ étant contraire au signe des seconds membres des égalités (b_5) ou (b_6)].

1° *Cas des égalités* (b_5). — Les égalités (b_5) ne différant des conditions (b_1) que par le changement de signe de l'expression $\left(\frac{B_2}{B_1}\right)$, il suffira, dans la présente recherche, de considérer les équations de condition dans lesquelles B_2 et B_1 n'entrent pas au même coefficient.

Les équations de condition de la première série se ramènent, par suite, aux deux types :

$$A_\alpha \ldots B_2 h^2 - 2A_\beta \ldots B_1 PQ H'^2 = \pm 1,$$
$$A_\alpha \ldots B_1 h^2 - 2A_\beta \ldots B_2 PQ H'^2 = \pm 1.$$

Or, en vertu des relations (b_5), nous avons les égalités

$$\left(\frac{A_\alpha \ldots B_2}{B_1}\right) = -1\ \left(\frac{2A_\beta \ldots B_2 PQ}{B_1}\right) = -1,$$

qui prouvent l'impossibilité en valeurs entières de h et de H' des équations représentées par ces types.

Les équations de la troisième série se ramènent aussi à deux formes générales :

$$(5_2)\qquad A_\alpha \ldots B_2\, PQh^2 - 2A_\beta \ldots B_1\, H'^2 = \pm 1,$$

$$(6_2)\qquad A_\alpha \ldots B_1\, PQh^2 - 2A_\beta \ldots B_2\, H'^2 = \pm 1.$$

Considérons d'abord le type (5_2); suivant la place occupée par le facteur premier B_3, ces équations se décomposent en deux autres types :

$$(5_3)\qquad \begin{cases} A_\alpha \ldots B_3\, B_2\, PQh^2 - 2A_\beta \ldots B_1\, H'^2 = \pm 1, \\ A_\alpha \ldots B_2\, PQh^2 - 2A_\beta \ldots B_3\, B_1\, H'^2 = \pm 1. \end{cases}$$

Or, la dernière de ces équations est impossible en valeurs entières de h et de H' en vertu de la relation $\left(\dfrac{2A_\beta \ldots B_3 B_1}{B_2}\right) = -1$.

En ayant égard à la place occupée par les divers facteurs premiers du déterminant, on passera ainsi par les équations successives :

$$\begin{array}{ll}
(5_4) & A_\alpha \ldots\ldots\ldots B_3\, B_2\, PQh^2 - 2A_\beta \ldots\ldots B_4\, B_1\, H'^2 = \pm 1, \\
(5_5) & A_\alpha \ldots\ldots\ldots B_3\, B_2\, PQh^2 - 2A_\beta \ldots B_5\, B_4\, B_1\, H'^2 = \pm 1, \\
(5_6) & A_\alpha \ldots\ldots B_6\, B_3\, B_2\, PQh^2 - 2A_\beta \ldots B_5\, B_4\, B_1\, H'^2 = \pm 1, \\
(5_7) & A_\alpha \ldots B_7\, B_6\, B_3\, B_2\, PQh^2 - 2A_\beta \ldots B_5\, B_4\, B_1\, H'^2 = \pm 1, \\
(5_8) & A_\alpha \ldots B_7\, B_6\, B_3\, B_2\, PQh^2 - 2A_\beta \ldots B_5\, B_4\, B_1\, H'^2 = \pm 1, \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

En remarquant que les facteurs premiers placés à gauche de B_1 dans le déterminant de l'équation (1) se divisent entre les coefficients de h^2 et de H'^2, de telle sorte que ceux de rang $4n$ ou $4n+1$ se placent au coefficient de H'^2, tandis que ceux de rang $4n+2$ ou $4n+3$ entrent au coefficient de h^2, nous arriverons finalement à l'une des deux équations :

$$(5_\alpha)\qquad \begin{cases} A_{2s-1}\, A_{2s-2} \ldots B_7\, B_6\, B_3\, B_2\, PQh^2 - 2A_{2s}\, A_{2s-3} \ldots B_5\, B_4\, B_1\, H'^2 = \pm 1 \\ \text{pour } 2s = 4n, \end{cases}$$

$$(5_\beta)\qquad \begin{cases} A_{2s}\, B_{2s-3} \ldots B_7\, B_6\, B_3\, B_2\, PQh^2 - 2A_{2s-1}\, A_{2s-2} \ldots B_5\, B_4\, B_1\, H'^2 = \pm 1 \\ \text{pour } 2s = 4n+2. \end{cases}$$

Avant d'examiner ces deux équations, occupons-nous de la discussion des équations représentées par le type (6_2). En suivant la marche tracée ci-dessus, on passera successivement par les équations

$$(6_3) \qquad A_\alpha \ldots\ldots\ldots B_1 PQh^2 - 2A_\beta \ldots\ldots B_3 B_2 H'^2 = \pm 1,$$

$$(6_4) \qquad A_\alpha \ldots\ldots B_4 B_1 PQh^2 - 2A_\beta \ldots\ldots B_3 B_2 H'^2 = \pm 1,$$

$$(6_5) \qquad A_\alpha \ldots B_5 B_4 B_1 PQh^2 - 2A_\beta \ldots\ldots B_3 B_2 H'^2 = \pm 1,$$

$$(6_6) \qquad A_\alpha \ldots B_5 B_4 B_1 PQh^2 - 2A_\beta \ldots B_6 B_3 B_2 H'^2 = \pm 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(6_\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{2s} A_{2s-3} \ldots B_4 B_1 PQh^2 - 2A_{2s-1} A_{2s-2} \ldots B_3 B_2 H'^2 = \pm 1 \\ \qquad \text{pour } 2s = 4n, \end{array} \right.$$

$$(6_\beta) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{2s-1} A_{2s-2} \ldots B_4 B_1 PQh^2 - 2A_{2s} A_{2s-3} \ldots B_3 B_2 H'^2 = \pm 1 \\ \qquad \text{pour } 2s = 4n + 2. \end{array} \right.$$

Cela posé, en considérant d'abord les équations (5_β) et (6_β) relatives au cas de $2s = 4n + 2$, on peut remarquer que ces équations, qui se déduisent l'une de l'autre par la permutation des coefficients de h^2 et de $2H'^2$, contiennent un nombre impair de facteurs premiers $8n + 5$ à chacun de ces coefficients. Jusqu'au facteur A_{2s-2}, qui est de rang $4n$, l'ensemble des facteurs premiers du déterminant de l'équation (1) se partage, en effet, en un nombre entier de groupes contenant chacun quatre facteurs consécutifs de rang $4n' + 1$, $4n' + 2$, $4n' + 3$, $4n''$. Or, pour chacun de ces groupes, deux facteurs entrent au coefficient de H'^2 des équations (5_β) et (6_β), tandis que les deux autres entrent au coefficient de h^2. Dès lors, comme dans les mêmes équations A_{2s} et A_{2s-1} entrent à des coefficients différents, il en résulte qu'elles renferment l'une et l'autre un nombre impair de facteurs premiers $8n + 5$ à chacun des coefficients de h^2 et de H'^2. Par cela même (n^{os} **15** et **31**), ces équations (5_β) et (6_β) sont impossibles en valeurs entières de h et de H', ou, en d'autres termes, dans les conditions où l'on s'est placé, l'équation (2) admet des solutions entières, pourvu que $2s$ soit de la forme $4n + 2$.

Dans le cas où $2s = 4n$, les équations (5_α) et (6_α), que l'on a à considérer, se déduisent aussi l'une de l'autre par la permutation des

coefficients de h^2 et de $2H'^2$, et contiennent un nombre pair de facteurs premiers $8n+5$ à chacun des coefficients de h^2 et de H'^2. Par suite, comme les facteurs de chacun des groupes $A_{2s}\dots$ et $B_{2t-1}\dots$ entrent en nombre impair dans le déterminant, si le coefficient de h^2 de l'une d'elles contient un nombre pair de facteurs premiers de chacun des groupes précités, le même coefficient, dans l'autre équation, contiendra un nombre impair de facteurs de chacun des mêmes groupes. Dès lors (n^o **42**), l'une des équations (5_α) ou (6_α) est toujours impossible en valeurs entières de h et de H'. Mais la méthode ne permet pas d'affirmer l'impossibilité de l'autre équation. Admettons, en effet, que l'équation (6_α) contienne au coefficient de h^2 un nombre pair de facteurs premiers de chacun des groupes considérés, nous aurons, en vertu des égalités (b_5), les relations

$$\left(\frac{A_{2s}A_{2s-3}\dots B_5B_4B_1PQ}{B_3}\right)=1\quad\left(\frac{2A_{2s-1}A_{2s-2}\dots B_6B_3B_2}{B_4}\right)=1,$$

qui auraient leurs analogues pour tous les facteurs premiers des deux coefficients.

Ainsi, en résumé, *lorsque les égalités* (a) *et* (b_5) *sont satisfaites, l'équation* (2) *admet toujours des solutions entières si le nombre* $2s$ *de facteurs premiers* $8n+5$ *qui entrent dans le déterminant de l'équation* (1), *à laquelle elle se rattache, est de la forme* $4n+2$. *On ne peut rien affirmer sur la possibilité de la même équation en valeurs entières, lorsque* $2s=4n$.

2° *Cas des égalités* (b_6). — Ces égalités ne diffèrent des égalités (b_5) que par le changement de signe de l'expression $\left(\frac{B_1}{A_{2s}}\right)$. Dès lors, comme dans les équations (5_α) et (6_α) considérées ci-dessus pour l'hypothèse $2s=4n$, les facteurs premiers A_{2s} et B_1 entrent aux mêmes coefficients, il en résulte que lorsque les égalités (a) et (b_6) sont satisfaites et lorsque $2s=4n$, la méthode ne permet pas d'affirmer la possibilité de l'équation (2) en valeurs entières.

Dans l'hypothèse $2s=4n+2$, il suffira, d'après le cas précédent, de considérer les équations de condition qui ne contiendront pas B_1

et A_{2s} au même coefficient. Ces équations se divisent en quatre types :

1re série. $\begin{cases} (7_2) & A_\alpha \ldots B_1 h^2 - 2A_{2s} \ldots B_\alpha PQ H'^2 = \pm 1, \\ (8_2) & A_{2s} \ldots B_\alpha h^2 - 2A_\alpha \ldots B_1 PQ H'^2 = \pm 1, \end{cases}$

3e série. $\begin{cases} (9_2) & A_\alpha \ldots B_1 PQ h^2 - 2A_{2s} \ldots B_\alpha H'^2 = \pm 1, \\ (10_2) & A_{2s} \ldots B_\alpha PQ h^2 - 2A_\alpha \ldots B_1 H'^2 = \pm 1. \end{cases}$

Par des considérations analogues aux précédentes, les types (7_2) et (8_2) de la première série se ramènent finalement aux équations

$$(7_\alpha) \quad A_{2s-1} A_{2s-3} \ldots B_7 B_5 B_3 B_1 h^2 - 2A_{2s} A_{2s-4} \ldots B_8 B_6 B_4 B_2 PQ H'^2 = \pm 1,$$

$$(8_\alpha) \quad A_{2s} A_{2s-2} \ldots B_8 B_6 B_4 B_2 h^2 - 2A_{2s-1} A_{2s-3} \ldots B_5 B_3 B_1 PQ H'^2 = \pm 1.$$

Or, comme $2s = 4n + 2$, on constate facilement que ces équations (7_α) et (8_α) renferment un nombre impair de facteurs premiers $8n + 5$ à chacun des coefficients. Elles sont donc impossibles en valeurs entières de h et de H' (nos **15** et **31**).

De même, en ayant égard à la place occupée dans les deux coefficients par les divers facteurs premiers du déterminant depuis B_1 jusqu'à A_{2s-2}, qui est de rang $4n$, les équations des types (9_2) et (10_2) se ramènent aux types

$$(9_\gamma) \begin{cases} \ldots A_{2s-4} \ldots B_6 B_5 B_2 B_1 PQ h^2 \\ \qquad - 2A_{2s} \ldots A_{2s-2} \ldots B_8 B_7 B_4 B_3 H'^2 = \pm 1, \end{cases}$$

$$(10_\gamma) \begin{cases} A_{2s} \ldots A_{2s-2} A_{2s-3} \ldots B_8 B_7 B_4 B_3 PQ h^2 \\ \qquad - 2 \ldots A_{2s-4} \ldots B_6 B_5 B_2 B_1 H'^2 = \pm 1. \end{cases}$$

Dans ces deux équations, le facteur premier A_{2s-1} est le seul dont la place ne soit pas encore assignée. Ainsi, comme le nombre de facteurs premiers du coefficient de h^2 doit être pair, le facteur A_{2s-1} devra entrer au coefficient de H'^2 de (9_γ) et au coefficient de h^2 de (10_γ). On obtiendra ainsi les équations finales

$$(9_\alpha) \quad A_{2s-4} \ldots B_6 B_5 B_2 B_1 PQ h^2 - 2A_{2s} A_{2s-1} A_{2s-2} \ldots B_7 B_4 B_3 H'^2 = \pm 1,$$

$$(10_\alpha) \quad A_{2s} A_{2s-1} \ldots B_7 B_4 B_3 PQ h^2 - 2A_{2s-4} \ldots B_6 B_5 B_2 B_1 H'^2 = \pm 1,$$

qui sont impossibles en valeurs entières de h et de H' en vertu des

égalités

$$\left(\frac{A_{2s-1}\ldots B_6 B_5 B_2 B_1 PQ}{A_{2s-1}}\right) = -1 \quad \left(\frac{2A_{2s-1}\ldots B_6 B_5 B_2 B_1}{A_{2s-1}}\right) = -1.$$

Ainsi, en résumé, *lorsque les égalités* (a) *et* (b_6) *sont satisfaites, l'équation* (2) *admet toujours des solutions entières si* $2s = 4n + 2$, *tandis qu'on ne peut rien affirmer dans l'hypothèse* $2s = 4n$.

51. *Remarque.* — Dans les théorèmes précédents, les relations (a), dérivant des égalités $\left(\frac{PQ}{A_1}\right) = \left(\frac{PQ}{A_2}\right) = \ldots = -1$, servent (n° **42**) à démontrer l'impossibilité en valeurs entières de h et de H' de toutes les équations de condition qui contiennent au coefficient de h^2 un nombre impair de facteurs premiers de l'un des deux groupes A_1, A_2,... et B_1, B_2, ... Les relations (b_1) ou (b_2), ..., ou (b_6) servent ensuite à établir la même impossibilité pour les autres équations de condition. Or, comme les quantités $\left(\frac{A_\alpha}{A_6}\right)\cdots$ qui entrent d'une part dans les relations (a) et d'autre part dans les égalités (b_1) ou (b_2),... sont différentes, il en résulte que, dans les permutations diverses que l'on pourra faire subir aux facteurs premiers du déterminant dans le but de rechercher tous les assemblages de signes des quantités $\left(\frac{A_1}{A_2}\right)\cdots$ pour lesquels ces théorèmes permettent d'affirmer la possibilité des équations considérées en valeurs entières, on pourra, dans les égalités (b_1),..., placer les facteurs premiers des deux groupes du déterminant dans un ordre quelconque, sans qu'il soit nécessaire que tous les facteurs d'un même groupe soient disposés les uns à la suite des autres.

Il n'est pas nécessaire, d'ailleurs, de rappeler (n° **42**) que dans ces théorèmes le nombre des facteurs premiers de chacun des deux groupes du déterminant doit toujours être impair.

52. La combinaison des théorèmes (n^{os} **38** et **49**) permet d'établir une série de propositions relatives aux équations considérées (n° **42**). Reprenons l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2A_1 A_2 \ldots A_{2s-1} B_1 B_2 \ldots B_{2t-1} PQ\, y^2 = -1,$$

qui admet toujours des solutions entières lorsque les égalités (a) du

théorème (n° 49) sont satisfaites, en même temps que l'une des conditions (b_1), (b_2), (b_3) ou (b_4) du même théorème, et considérons l'équation

$$(3)\quad x^2 - 2A_1 A_2 \ldots A_{2s-1} B_1 B_2 \ldots B_{2t-1} B_{2t} B_{2t+1} PQ y^2 = -1,$$

qui dérive de l'équation (2) par l'introduction dans le déterminant de deux facteurs premiers B_{2t} et B_{2t+1} supposés l'un et l'autre de la forme $8n+5$, et se rattachant aux conditions précitées (a) de la manière suivante :

$$(a_1)\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{A_1}{P}\right)=\left(\frac{A_2}{P}\right)=\ldots=\left(\frac{A_{2s-1}}{P}\right)=\left(\frac{B_1}{Q}\right)=\ldots=\left(\frac{B_{2t-1}}{Q}\right)=\left(\frac{B_{2t}}{Q}\right)=\left(\frac{B_{2t+1}}{Q}\right)=\pm 1,\\&\left(\frac{A_1}{Q}\right)=\left(\frac{A_2}{Q}\right)=\ldots=\left(\frac{A_{2s-1}}{Q}\right)=\left(\frac{B_1}{P}\right)=\ldots=\left(\frac{B_{2t-1}}{P}\right)=\left(\frac{B_{2t}}{P}\right)=\left(\frac{B_{2t+1}}{P}\right)=\mp 1.\end{aligned}\right.$$

L'équation (3) admettra toujours des solutions entières (n° 38) si, isolant les deux facteurs B_{2t} et B_{2t+1} de son déterminant, les autres facteurs premiers $A_1, A_2, \ldots, B_{2t-1}$, P, Q se partagent en deux groupes composés chacun d'un nombre pair de termes remplissant les conditions

$$(a_2)\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{A_\alpha}{B_{2t}}\right)=\ldots=\left(\frac{B_\alpha}{B_{2t}}\right)=\left(\frac{Q}{B_{2t}}\right)=\left(\frac{A_\alpha}{B_{2t+1}}\right)=\ldots=\left(\frac{B_\alpha}{B_{2t+1}}\right)=\left(\frac{Q}{B_{2t+1}}\right)=\pm 1,\\&\left(\frac{A_\beta}{B_{2t}}\right)=\ldots=\left(\frac{B_\beta}{B_{2t}}\right)=\left(\frac{P}{B_{2t}}\right)=\left(\frac{A_\beta}{B_{2t+1}}\right)=\ldots=\left(\frac{B_\beta}{B_{2t+1}}\right)=\left(\frac{P}{B_{2t+1}}\right)=\pm 1.\end{aligned}\right.$$

Ainsi *l'équation* (3) *admet toujours des solutions entières lorsque les égalités* (a_1) *et* (a_2) *sont satisfaites, en même temps que l'une des conditions* (b_1), (b_2), (b_3) ou (b_4) *du théorème* (n° 49).

Il est utile de rappeler que, dans les égalités (a_1), le nombre des facteurs premiers de chaque groupe doit être impair, tandis que ce nombre doit être pair dans les égalités (a_2). De plus les quantités

$$\left(\frac{B_{2t}}{Q}\right)=\left(\frac{B_{2t+1}}{Q}\right)=\left(\frac{Q}{B_{2t}}\right)=\left(\frac{Q}{B_{2t+1}}\right)$$

doivent avoir un signe contraire à celui des quantités

$$\left(\frac{B_{2t}}{P}\right)=\left(\frac{B_{2t+1}}{P}\right)=\left(\frac{P}{B_{2t}}\right)=\left(\frac{P}{B_{2t+1}}\right).$$

On reconnaîtrait aussi, d'après la marche suivie (n° 40), que si les groupes des égalités (a_2) sont composés l'un et l'autre d'un nombre impair de termes, l'équation (3) ne pourrait pas admettre de solutions entières.

En introduisant dans le déterminant de l'équation (3) deux facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$, A_{2s} et A_{2s+1} se rattachant au premier groupe des conditions (a_1), ou bien deux facteurs B_{2t+2} et B_{2t+3} appartenant au deuxième groupe, et en établissant, relativement à ces deux nouveaux facteurs premiers, des conditions (a_3) analogues aux conditions (a_2), on obtiendrait une nouvelle équation (4), qui admettrait toujours des solutions entières, et ainsi de suite.

Les mêmes considérations sont évidemment applicables à la combinaison des théorèmes (n°s 38 et 50).

55. Si les conditions (a) inscrites (n° 49) sont satisfaites, et si en même temps les égalités (b_1), (b_2), (b_3) ou (b_4) considérées aussi (n° 49) sont remplacées par l'une des conditions

$$(c_1) \qquad \left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \left(\frac{A_2}{A_3}\right) = \ldots = \left(\frac{B_{2h-3}}{B_{3h-2}}\right),$$

$$(c_2) \qquad \left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \left(\frac{A_2}{A_3}\right) = \ldots = \left(\frac{B_{2h-3}}{B_{2h-2}}\right) = \left(\frac{B_{2h-2}}{A_1}\right),$$

$$(c_3) \qquad \left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \left(\frac{A_2}{A_3}\right) = \ldots = \left(\frac{A_1}{B_{2h-1}}\right),$$

$$(c_4) \qquad \left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \left(\frac{A_1}{A_3}\right) = \ldots = \left(\frac{A_1}{B_{2h-1}}\right) = \left(\frac{A_f}{A_g}\right)$$

[le signe de toutes les quantités analogues complémentaires $\left(\frac{A_k}{B_l}\right)\cdots$ étant contraire à celui des seconds membres des égalités (c_1), (c_2), (c_3), (c_4)], conditions dans lesquelles h est $< t$, il existera dans le déterminant de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2A_1 \ldots A_{2s-1} B_1 \ldots B_{2t-1} PQy^2 = -1$$

au moins deux facteurs B_{2t-2} et B_{2t-1} qui seront tels que les quantités $\left(\frac{A_1}{B_{2t-2}}\right)\cdots$ et $\left(\frac{A_1}{B_{2t-1}}\right)\cdots$, obtenues par les combinaisons deux à deux de ces facteurs premiers avec l'ensemble des autres, seront de même signe.

Par suite, l'équation de condition

$$(f) \qquad B_{2t-2}B_{2t-1}h^2 - 2A_1\ldots B_{2t-3}PQH'^2 = \pm 1$$

pourra évidemment admettre des valeurs entières pour h et H'. Donc, dans l'une quelconque des hypothèses où l'on s'est placé, la méthode suivie ne permet pas d'affirmer la possibilité de l'équation (2) en valeurs entières.

Toutefois, comme les facteurs premiers des deux groupes $A_1 \ldots$ et $B_1 \ldots$ peuvent être placés dans un ordre quelconque dans le déterminant de l'équation (2), il pourrait arriver que les facteurs B_{2t-2} et B_{2t-1} considérés ci-dessus appartinssent à deux groupes différents, auquel cas (n° **42**) l'équation de condition (f) ne saurait admettre de valeurs entières pour h et H'. Représentons dans ce cas par A_α et B_β les facteurs correspondant à B_{2t-2} et B_{2t-1}, et considérons l'équation de condition

$$(g) \qquad A_1\ldots B_{2t-3}h^2 - 2A_\alpha B_\beta PQH'^2 = \pm 1,$$

il est clair que cette équation ne pourra pas admettre de valeurs entières pour h et H', ce qui conduit aux conséquences déjà signalées ci-dessus.

54. Des considérations analogues à celles qui ont été sommairement développées (n° **52**) permettent d'établir des théorèmes relatifs à la possibilité en valeurs entières de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2A_1\ldots A_a A'_1\ldots A'_{a'} B_1\ldots B_b B'_1\ldots B'_{b'} PQy^2 = -1,$$

lorsque les facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$, qui entrent dans le déterminant de l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2A_1\ldots A_a A'_1\ldots A'_{a'} B_1\ldots B_b B'_1\ldots B'_{b'} y^2 = -1,$$

se partagent en deux groupes composés d'un nombre pair de termes $A_1\ldots A_a$, $A'_1\ldots A'_{a'}$ et $B_1\ldots B_b$, $B'_1\ldots B'_{b'}$, pour lesquels on aurait, relativement aux deux facteurs premiers P et Q également de la forme

$8n+5$, les conditions

$$(m)\quad \begin{cases} \left(\frac{PQ}{A_1}\right)=\ldots=\left(\frac{PQ}{A_a}\right)=\left(\frac{PQ}{A'_1}\right)=\ldots=\left(\frac{PQ}{A'_{a'}}\right)=1, \\ \left(\frac{PQ}{B_1}\right)=\ldots=\left(\frac{PQ}{B_b}\right)=\left(\frac{PQ}{B'_1}\right)=\ldots=\left(\frac{PQ}{B'_{b'}}\right)=-1. \end{cases}$$

Supposons en effet que les deux séries de nombres premiers $B_1 \ldots B_b$ et $B'_1 \ldots B'_{b'}$ dans lesquelles se subdivisent les facteurs du second groupe de l'équation (1) soient composées l'une et l'autre d'un nombre impair de termes satisfaisant, relativement aux facteurs P et Q, aux conditions (a) inscrites (n° **42**). Supposons de plus que les mêmes facteurs premiers satisfassent soit à l'une des conditions $(b_1), \ldots, (b_4)$ inscrites (n° **49**), soit aux conditions du théorème (n° **50**), l'équation

$$(3)\qquad x^2 - 2B_1 \ldots B_b B'_1 \ldots B'_{b'} PQ y^2 = -1$$

admettra toujours des solutions entières.

Cela posé, introduisons dans le déterminant de cette dernière équation deux facteurs premiers A_1 et A_2 du premier groupe de l'équation (1), il est certain (n° **38**) que la nouvelle équation

$$(4)\qquad x_2 - 2A_1 A_2 B_1 \ldots B_b B'_1 \ldots B'_{b'} PQ y^2 = -1$$

sera toujours soluble en nombres entiers, si, isolant les deux facteurs A_1 et A_2 de son déterminant, les autres facteurs premiers se partagent en deux séries composées l'une et l'autre d'un nombre pair de termes satisfaisant aux conditions

$$(d)\quad \begin{cases} \left(\frac{B'_1}{A_1}\right)=\ldots=\left(\frac{P}{A_1}\right)=\left(\frac{Q}{A_1}\right)=\left(\frac{B'_1}{A_2}\right)=\ldots=\left(\frac{P}{A_2}\right)=\left(\frac{Q}{A_2}\right)=\pm 1, \\ \left(\frac{B_\alpha}{A_1}\right)=\ldots=\left(\frac{B'_6}{A_1}\right)=\left(\frac{B_\alpha}{A_2}\right)=\ldots=\left(\frac{B'_6}{A_2}\right)=\pm 1. \end{cases}$$

Partant de l'équation (4), on introduira dans son déterminant deux nouveaux facteurs premiers du premier groupe de facteurs de l'équation (2), et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les facteurs de ce groupe.

Il est utile de remarquer en terminant que, dans les égalités (d)

et dans celles qui suivront, les conditions

$$\left(\frac{PQ}{A_1}\right) = \left(\frac{PQ}{A_2}\right) = \left(\frac{PQ}{A_3}\right) = \ldots = 1$$

dérivant des égalités (m) devront toujours être satisfaites.

55. Pour fixer les idées, considérons l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2ABCDEFy^2 = -1$$

qui contient six facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ dans son déterminant, et supposons que les facteurs premiers du déterminant de l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2ABCDy^2 = -1$$

se partagent en deux groupes composés d'un nombre pair de termes satisfaisant aux conditions

$$(m) \qquad \left(\frac{EF}{A}\right) = \left(\frac{EF}{B}\right) = 1, \quad \left(\frac{EF}{C}\right) = \left(\frac{EF}{D}\right) = -1,$$

l'équation

$$(3) \qquad x^2 - 2CDEFy^2 = -1$$

admettra toujours des solutions entières (n° 43) si les égalités suivantes, dans lesquelles on peut changer le signe des seconds membres, sont remplies

$$(d) \qquad \left(\frac{C}{E}\right) = \left(\frac{D}{F}\right) = 1, \quad \left(\frac{C}{F}\right) = \left(\frac{D}{E}\right) = -1.$$

Cela étant, l'équation (2) sera toujours soluble en entiers (n° 38) si, aux égalités précédentes (d), on ajoute l'une quelconque des conditions nouvelles (e) ou (f)

$$(e) \quad \left(\frac{C}{A}\right) = \left(\frac{D}{A}\right) = \left(\frac{E}{A}\right) = \left(\frac{F}{A}\right) = \left(\frac{C}{B}\right) = \left(\frac{D}{B}\right) = \left(\frac{E}{B}\right) = \left(\frac{F}{B}\right),$$

$$(f) \quad \begin{cases} \left(\frac{C}{A}\right) = \left(\frac{D}{A}\right) = \left(\frac{C}{B}\right) = \left(\frac{D}{B}\right) = \pm 1, \\ \left(\frac{E}{A}\right) = \left(\frac{F}{A}\right) = \left(\frac{E}{B}\right) = \left(\frac{F}{B}\right) = \pm 1. \end{cases}$$

Par suite, en observant : 1° que les égalités (d) peuvent être remplacées par les conditions

$$(d') \qquad \left(\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{E}}\right) = \left(\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{F}}\right) = \left(\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{C}}\right) = \left(\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{D}}\right) = -1;$$

2° que les égalités (e) et (f) sont équivalentes aux conditions

$$(e') \qquad \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{C}}\right) = \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{D}}\right) = \left(\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{A}}\right) = \left(\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{B}}\right) = 1,$$

$$(e'') \qquad \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{E}}\right) = \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{F}}\right) = \left(\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{A}}\right) = \left(\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{B}}\right) = 1.$$

nous arrivons à la proposition suivante :

Théorème. — *L'équation* $x^2 - 2\,\mathrm{ABCDEF}\,y^2 = -1$, *qui contient six facteurs premiers* $\equiv 5 \pmod{8}$ *dans son déterminant, admet toujours des solutions entières, lorsque les conditions suivantes sont remplies :*

1° Si l'équation $x^2 - 2\,\mathrm{CDEF}\,y^2 = -1$ admet des solutions entières en vertu des égalités (d');

2° Si les équations $x^2 - 2\,\mathrm{ABCD}\,y^2 = -1$ et $x^2 - 2\,\mathrm{ABEF}\,y^2 = -1$ admettent des solutions de même nature en vertu des égalités (e') et (e'').

(*La suite prochainement.*)

NOTE

SUR

QUELQUES SOMMATIONS DE CUBES [*];

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

1° On connaît plusieurs solutions, en nombres entiers et positifs, de l'équation

$$x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3 = y^3. \tag{1}$$

On peut en déduire un nombre infini d'autres solutions, en multipliant par un même facteur les valeurs déjà trouvées de x, r et y. Ces solutions seront *dérivées;* nous chercherons d'autres solutions *primitives* de la manière suivante.

Faisant

$$x + r = 4s, \quad y = 6t,$$

on a

$$s(r + 8s^2) = 9t; \tag{2}$$

pour résoudre celle-ci, on pose

$$s = 9t'^3, \quad r + s\sqrt{-8} = (p + q\sqrt{-8})^3,$$

d'où l'on tire

$$r = p(p^2 - 24q^2), \quad s = q(3p^2 - 8q^2),$$

---

[*] Cette Note a été imprimée en italien dans les *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei* (t. XIX, anno XIX, sessione I, del 3 décembre 1865), et dans les *Annali di Matematica pura ed applicata*, publiées par le M. professeur Tortolini (t. VII, n° III). La traduction que nous communiquons à nos lecteurs, sur la demande du prince Balthasar Boncompagni qui nous l'a transmise, est de M. Narducci. (J. L.)

et, par conséquent,

$$t'^3 = s'(p^2 - 24s'^2), \quad \text{en faisant} \quad q = 3s'.$$

Ensuite on fait

$$s' = 27t''^3, \quad p + s'\sqrt{24} = (r' + s''\sqrt{24})^3,$$

d'où

$$p = r'(r'^2 + 72s''^2), \quad s' = 3s''(r'^2 + 8s''^2),$$

c'est-à-dire

$$s''(r'^2 + 8s''^2) = 9t''^3,$$

équation semblable à l'équation (2), et qui étant résolue avec les mêmes nombres peut servir à en trouver successivement autant de solutions que l'on désire.

Prenons la solution

$$r' = s'' = t'' = 1:$$

nous en déduirons

$$s' = 27t'^3 = 27, \quad q = 3s' = 81, \quad p = r'(r'^2 + 72s''^2) = 73,$$
$$r = p(p^2 - 24q^2) = 73^2(73 - 24 \,.\, 81^2) = -73 \,.\, 152135,$$
$$s = q(3p^2 - 8q^2) = 81(3 \,.\, 73^2 - 8 \,.\, 81^2) = -81 \,.\, 36501,$$

et par conséquent

$$r = -11105855 \quad \text{et} \quad x = 4s - r = -720469.$$

En changeant le signe, nous aurons les valeurs entières et positives

$$x = 720469, \quad r = 11105855,$$

qui satisferont à l'équation (1) avec y aussi entier et positif.

2° On peut appliquer la même méthode à l'équation

$$(3) \qquad x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3 + \ldots + (x + nr - r)^3 = y^3.$$

en supposant $n > 3$. Faisant $s = 2x + (n - 1)r$, cette équation de-

vient, comme l'a remarqué M. Le Besgue,

$$ns[s^2+(n^2-1)r^2]=8y^3; \tag{4}$$

par conséquent, dans le cas de $n=4$, on a

$$s(s^2+15r^2)=2y^3, \tag{5}$$

et si l'on fait

$$s=2s'^3,\quad s+r\sqrt{-15}=(p+q\sqrt{-15})^3,$$

il en résulte

$$2s'^3=p(p^2-45q^2),\quad r=3q(p^2-5q^2);$$

faisant ensuite

$$p=2y'^3,\quad p+3q\sqrt{5}=(s''+r'\sqrt{5})^3,$$

on a

$$3q=r'(3s''^2+5r'^2),\quad s''(s''^2+15r'^2)=2y'^3:$$

la dernière de ces équations est semblable à l'équation (5).

Prenant $r'=1$, $s''=25$, $y'=20$, valeurs qui correspondent à l'égalité

$$11^3+12^3+13^3+14^3=20^3,$$

on trouvera

$$p=2y'^3=2.20^3,\qquad s'=y'(s''^2-5r'^2)=20.620=20^2.31,$$

$$s=2s'^3=2.20^6.31^3,\quad q=\frac{r'}{3}(3s''^2+5r'^2)=\frac{1880}{3}=20.\frac{94}{3},$$

$$r=3q(p^2-5q^2)=2.20^4.\frac{47}{9}(20^3.4.9-47^2)=2.20^4.\frac{47}{9}.285791.$$

On peut multiplier par 9 et diviser par 2.20^4 les valeurs de r et s en les réduisant ainsi à

$$r=47.285791=13432177,$$
$$s=9.20^2.31^3=107247600,$$

23..

d'où

$$x = \frac{s - 3r}{2} = \frac{66951069}{2}.$$

Donc, en multipliant par 2 ces valeurs de x et r, on aura une nouvelle solution de l'équation (3), pour $n = 4$, en nombres entiers et positifs,

$$x = 66951069, \quad r = 26864354.$$

3° En général, pour satisfaire à l'équation (4), faisant par abrégé $n^2 - 1 = m$, posons

$$s = n^2 s'^3, \quad s + r\sqrt{-m} = (p + q\sqrt{-m})^3,$$

d'où

$$r = q(3p^2 - mq^2), \quad n^2 s'^3 = p(p^2 - 3mq^2);$$

posons en outre

$$np = 8y'^3, \quad p + q\sqrt{3m} = (s'' + r'\sqrt{3m})^3,$$

d'où

$$q = 3r'(s''^2 + mr'^2), \quad p = s''(s''^2 + 9mr'^2);$$

alors, en faisant $3r' = r''$, nous aurons une équation semblable à l'équation (4), savoir

$$ns''[s''^2 + (n^2 - 1)r''^2] = 8y'^3.$$

Ainsi, étant donnée une solution de l'équation (4), les mêmes nombres pourront être pris pour les valeurs de r'', s'' et y'', et de ceux-ci on déduira r', p, q, r, s, d'où l'on aura une nouvelle solution de l'équation (4), qui pourra pareillement en donner une autre, etc., etc. Mais il est clair que les solutions obtenues de cette manière pourront n'être pas les seules possibles ; en outre, quoiqu'on trouve des valeurs positives pour s et r, il peut se faire que x se trouve négatif, et que par conséquent on n'ait pas pour l'équation (3) une solution en nombres positifs, quoiqu'on en ait une pour l'équation (4).

Prenant

$$r'' = s'' = 1, \quad y' = \frac{n}{2},$$

il en résultera

$$r' = \frac{1}{3}, \quad p = n^2, \quad q = \frac{n^2+8}{9}, \quad r = n^4 \cdot \frac{n^2+8}{3} - (n^2-1)\left(\frac{n^2+8}{9}\right)^3,$$

$$s = n^6 - n^2(n^2-1)\frac{(n^2+8)^2}{27}:$$

ces valeurs de r et de s sont toutes les deux négatives lorsque n est plus grand que 16, de $n = 3$ à $n = 7$, r est positif et s négatif, mais dans les deux cas on a $s < (n-1)r$, abstraction faite des signes, et à cause de cela dans le premier membre de l'équation (3) quelques cubes seront positifs, d'autres négatifs. De $n = 8$ jusqu'à $n = 16$ sera s négatif, r positif, mais en valeur absolue sera $s > (n-1)r$, par conséquent x sera négatif et tous les cubes indiqués seront aussi négatifs; d'où il résulte qu'un simple changement de signes suffira pour rendre positifs tous les termes du premier membre de l'équation (3).

4° On peut trouver d'autres formules plus commodes pour déduire d'une solution de l'équation (4) une nouvelle solution.

Soit une solution

$$s = f, \quad r = g, \quad 2y = h,$$

et retenant la même valeur de s, supposons

$$r = g + z, \quad 2y = h + pz:$$

en substituant, en ôtant les termes qui disparaissent à cause de l'équation (4), et en divisant ensuite par z, nous aurons

$$mnf(2g + z) = 3h^2p + 3hp^2z + p^3z^2,$$

où $m = n^2 - 1$; posant ensuite

$$p = \frac{2mnfg}{3h^2},$$

nous aurons

$$z = \frac{mnf - 3hp^2}{p^3},$$

et par conséquent une solution de l'équation (4) sera aussi

$$s = f, \quad r = g + \frac{mnf - 3hp^2}{p^3}, \quad 2y = \frac{mnf - 2hp^2}{p^2}.$$

Posant la valeur de p, posant pour h^3 la valeur

$$h^3 = nf(f + mg^2),$$

qui résulte de l'équation (4), et faisant

$$(6)\ f' = 8m^2fg^3, \quad g' = 27f^4 + 18mf^2g^2 - m^2g^4, \quad h' = 2mgh(9f^2 + mg^2),$$

on trouvera

$$s = \frac{f'}{8m^2g^3}, \quad r = \frac{g'}{8m^2g^3}, \quad 2y = \frac{h'}{8m^2g^3};$$

il est clair par conséquent que l'équation (4) sera satisfaite aussi par les valeurs $s = f'$, $r = g'$, $2y = h'$ qui sont données par les formules (6), et qui seront entières si f, g, h sont entiers.

Prenant $f = g = 1$, $h = n$, les formules (6) donneront

$$f' = 8m^2, \quad g' = 27 + 18m - m^2, \quad h' = 2mn(m + 9):$$

la valeur de g' sera positive par $n = 3$ et $n = 4$, négative par $n > 4$, et par conséquent au moyen de $n > 4$ on changera g' en $-g'$, mais depuis $n = 3$ jusqu'à $n = 11$ on aura en valeur absolue $f' > (n - 1)g'$, de sorte qu'il en résultera des solutions de l'équation (3) avec des valeurs entières et positives de r, x et y. Par exemple, pour $n = 6$ on a

$$f' = 8.35^2, \quad g' = 8.71,$$

et en ôtant le facteur commun 8, il en résulte

$$x = \frac{25^2 - 5.71}{2} = 435, \quad r = 71.$$

On peut faire aussi

$$a = \frac{mg^2}{f^2}, \quad a' = \frac{mg'^2}{f'^2},$$

d'où

$$(7) \qquad a' = \frac{1}{64a^3}(27 + 18a - a^2)^2;$$

et s'il résultera $a' < 1$, il sera

$$f'^2 > mg'^2 > (n-1)^2 g'^2,$$

et par conséquent

$$f' > (n-1)g',$$

de sorte que l'on pourra avoir encore une solution de l'équation (3) en nombres entiers et positifs. Pareillement on pourra calculer d'autres quantités a'', a''',..., qui dépendent de a', a'',..., comme a' dépend de a, et lorsqu'on arrive à une de ces quantités qui soit < 1, on aura une solution de la même équation (3) en nombres entiers et positifs.

5° On doit remarquer aussi que même pour des valeurs de n aussi grandes que l'on voudra, on peut satisfaire à l'équation (3) avec x et y entiers positifs, en supposant $r = 1$: il suffit de prendre pour n un cube qui ne soit pas divisible par 3. Cela résulte des formules à l'aide desquelles M. Camille Pagliani, cadet dans le corps royal des Pionniers de Modène, résolut le problème de *trouver mille cubes entiers consécutifs dont la somme soit un cube* [*]. Car, en changeant n en n^3 et en faisant

$$x = \frac{(n^2-1)^2 - 3(n^3+1)}{6},$$

on trouve

$$(x+1)^3 + (x+2)^3 + \ldots + (x+n^3)^3 = \left(nx + \frac{n^3(n+1)}{2}\right)^3,$$

et l'on voit d'une part que le numérateur de la valeur de x est toujours un nombre pair, d'autre part qu'il est aussi divisible par 3, lorsque n ne l'est pas, attendu qu'alors $n^2 - 1$ est divisible par 3; par conséquent, dans ce cas, x sera toujours un nombre entier. Si l'on prend n divi-

[*] Voir *Annales de Mathématiques*, par Gergonne, t. XX, p. 382-384.

sible par 3, $3x$ sera un nombre entier, et en multipliant l'équation précédente par 3^3, on aura égale à un cube la somme des cubes de n^3 nombres entiers formant une progression arithmétique dont la raison sera 3.

6° Si l'on demande que la somme des termes d'une progression arithmétique élevés au cube ne soit pas un cube, mais un carré, on aura, au lieu de l'équation (3), la suivante :

$$(8)\qquad x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 + \ldots + (x+nr-r)^3 = y^2,$$

qui pourra être ramenée à la forme

$$(9)\qquad ns[s^2 + (n^2-1)r^2] = 8y^2.$$

Faisant $2y = nst$, nous tirerons de celle-ci

$$s^2 + (n^2-1)r^2 = 2nst^2,$$

d'où

$$s = nt^2 \pm \sqrt{n^2t^4 - (n^2-1)r^2}:$$

ensuite nous poserons

$$n^2t^4 - (n^2-1)r^2 = (nt^2 - rp)^2,$$

et nous obtiendrons

$$(10)\qquad r = \frac{2npt^2}{n^2-1+p^2},$$

à laquelle correspondront deux valeurs de s,

$$(11)\qquad s = \frac{2n(n^2-1)t^2}{n^2-1+p^2}, \quad s = \frac{2np^2t^2}{n^2-1+p^2}.$$

En assignant des valeurs rationnelles, telles que l'on veut, à p et t, on aura donc des valeurs rationnelles par r, s et y, et ainsi les formules (10) et (11) donneront la solution générale de l'équation (9) en nombres rationnels.

Les deux valeurs (11) peuvent être réduites à une seule, parce que la seconde devient identique à la première si l'on y change p en $\frac{n^2-1}{p}$,

ce qui ne change pas l'expression de r. De la première de ces valeurs (11), on déduit

$$(12) \qquad x = \frac{n(n-1)(n+1-p)t^2}{n^2-1+p^2};$$

voilà donc la formule qui, jointe à la formule (10), donnera la solution générale de l'équation (8) en nombres rationnels.

Si nous prenons

$$t = 1, \quad p = n - 1,$$

nous trouvons

$$r = 1, \quad x = 1,$$

solution qui est très-connue. Prenant

$$p = \frac{n^2-1}{n},$$

on aura

$$r = \frac{2n^2t^2}{2n^2-1}, \quad x = \frac{n^2t^2}{2n^2-1}.$$

par conséquent il viendra

$$x = 1, \quad r = 2,$$

si l'on pose

$$(13) \qquad 2n^2 - 1 = n^2t^2,$$

c'est-à-dire $2n^2 - 1$ carré, ce qui correspond aussi à une solution connue. Les valeurs de n qui satisfont à l'équation (13) sont comprises dans la formule

$$(14) \qquad n = \frac{(\sqrt{2}+1)^i + (\sqrt{2}-1)^i}{2\sqrt{2}},$$

où i indique un nombre impair positif.

7° Les anciens arithméticiens ont observé que les nombres $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, $s = 6$ vérifient simultanément les trois équations

$$(15) \qquad xy = 2s, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad x^3 + y^3 + z^3 = s^3:$$

on peut démontrer que, parmi les nombres entiers, ce sont les seuls qui jouissent de cette propriété.

Car la solution la plus générale de la deuxième des équations (15) en nombres entiers est

$$x = m(a^2 - b^2),\quad y = 2mab,\quad z = m(a^2 + b^2),$$

si m, a, b sont des nombres entiers, dont les derniers a et b peuvent être supposés premiers entre eux; par conséquent la première des équations (15) donnera

$$s = m^2 ab(a^2 - b^2),$$

et en substituant le tout dans la troisième on aura

$$2(a^4 + 3b^4 + 4ab^3) = m^3 ab^3 (a^2 - b^2)^3.$$

Il suit de cette équation que $\frac{2a^4}{b^2}$ doit être un nombre entier, et en supposant b premier à a, sera b^2 diviseur de 2, et par conséquent $b = 1$. Donc

$$2(a^4 + 3 + 4a) = m^3 a(a^2 - 1)^3,$$

c'est-à-dire, en divisant par $a + 1$,

$$2(a-1)^2 + 4 = m^3 a(a^2 - 1)(a-1)^2;$$

et par conséquent 4 divisible par $(a-1)^2$, 2 divisible par $a - 1$, et ainsi, $a - 1 = 2$, ou bien $a - 1 = 1$, ce qui donne $a = 3$, ou bien $a = 2$. La dernière équation par $a = 3$ deviendrait

$$12 = m^3 . 3 . 8 . 4,\quad \text{c'est-à-dire}\quad 1 = 8m^3,$$

ce qui est absurde avec m entier : il reste donc seulement $a = 2$ qui donne $1 = m^3$, $m = 1$, et par conséquent les valeurs déjà indiquées de x, y, z, s.

Au lieu de la troisième des équations (15), on pourrait proposer la suivante plus générale

$$(16)\qquad x^3 + y^3 + z^3 = s^n t,$$

dans laquelle t est une nouvelle inconnue et n un exposant donné entier et > 1. En procédant comme auparavant, on trouvera une équation

$$2(a^4 + 3b^4 + 4ab^3) = m^{2n-3} a^{n-2} b^n (a^2 - b^2)^n t,$$

de laquelle on déduira $\frac{2a^4}{b}$ entier, et par conséquent $b = 1$, si l'on veut que t aussi soit entier. On aura ensuite

$$2(a-1)^2 + 4 = m^{2n-3} a^{n-2} (a-1)^n (a+1)^{n-2} t,$$

et pour cela $\frac{4}{(a-1)}$ et $\frac{2}{a-1}$ entiers, d'où $a = 2$ ou bien $a = 3$. Prenant $a = 3$, on trouve

$$12 = m^{2n-3} . 3^{n-3} . 4^{n-3} t,$$

ce qui, pour $n > 2$, donne l'égalité

$$\frac{1}{2^n} = m^{2n-3} . 3^{n-3} . 4^{n-3} t,$$

absurde avec m et t entiers; et pour $n = 2$ donne $3 = mt$, et par conséquent

$$m = 1 \quad \text{et} \quad t = 3,$$

ou bien

$$m = 3 \quad \text{et} \quad t = 1.$$

Prenant $a = 2$, on a

$$6 = m^{2n-3} . 2^{n-2} . 3^{n-2} t,$$

ce qui est absurde lorsque $n > 3$, donne $m = t = 1$ si $n = 3$, et $mt = 6$ si $n = 2$, de sorte que l'on a alors pour m et t les valeurs 2, 3; 1, 6.

LES NOMBRES PREMIERS DE 100000001 A 100001699.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE PAR M. WILLIAM DAVIS.

Il s'agit, comme on voit, de nombres premiers dont la valeur surpasse *cent millions*. M. William Davis nous écrit qu'il a cherché tous ceux qui existent de

100000001

à

100001699

et qu'il en a trouvé quatre-vingt-dix-neuf. Il ne paraît avoir suivi à cet effet que la méthode si connue, mais si pénible, qui consiste à essayer la division par les nombres premiers inférieurs à la racine carrée des divers nombres dont on s'occupe, c'est-à-dire ici inférieurs à 10 000. Nous allons donner les quatre derniers chiffres des nombres premiers ainsi constatés, de sorte qu'il faudra placer l'unité suivie de quatre zéros (ou 10 000) en tête de ces quatre chiffres pour avoir les nombres eux-mêmes :

0007,	0013,	0037,
0039,	0049,	0073,
0081,	0123,	0127,
0193,	0213,	0217,
0223,	0231,	0237,
0259,	0267,	0279,
0357,	0379,	0391,
0393,	0399,	0421,
0429,	0463,	0469,
0471,	0493,	0541,
0543,	0561,	0567,

0577,	0609,	0627,
0643,	0651,	0657,
0661,	0669,	0673,
0687,	0717,	0721,
0723,	0793,	0799,
0801,	0837,	0841,
0853,	0891,	0921,
0937,	0939,	0963,
0969,	1029,	1053,
1059,	1081,	1087,
1107,	1119,	1131,
1147,	1159,	1177,
1183,	1203,	1207,
1219,	1221,	1227,
1303,	1329,	1333,
1347,	1353,	1357,
1399,	1431,	1449,
1467,	1507,	1533,
1537,	1549,	1569,
1581,	1591,	1611,
1623,	1647,	1651,
1653,	1687,	1689.

Ainsi les trois plus petits nombres premiers trouvés par M. William Davis sont

100000007,
100000013,
100000037;

les trois plus grands sont

100001653,
100001687,
100001689.

Il y a trois colonnes de 33 chiffres chaque, en tout 3.33 ou 99 nombres premiers.

Quant aux nombres non premiers, M. William Davis les a mis sous forme de produits. On a, par exemple, en commençant,

$$100000001 = 17 \times 5882353;$$

et, en allant tout de suite plus loin,

$$100000069 = 13 \times 17 \times 17 \times 43 \times 619.$$

On doit désirer que M. William Davis publie bientôt son travail complet.

Sur les formes quadratiques proprement primitives, dont le déterminant changé de signe est > 0 *et* $\equiv 3 \pmod{8}$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Étant donné un entier k positif et $\equiv 3 \pmod{8}$, soit N le nombre des classes de formes quadratiques proprement primitives dont le déterminant est égal à $-k$. Considérons successivement les diverses formes qui représentent ces classes, et pour chacune d'elles cherchons les deux plus petits nombres impairs a, a' qu'elle exprime proprement, a' étant supposé $> a$, puis effectuons le produit

$$a(a' - a),$$

enfin calculons la somme

$$\sum a(a' - a)$$

pour les N formes indiquées. J'ai reconnu que l'on a toujours

$$\sum a(a' - a) = \frac{2}{3} \mathrm{N}k.$$

La démonstration est facile : je laisse à nos jeunes lecteurs le plaisir de la trouver d'eux-mêmes.

Soit, par exemple, $k = 3$; on n'a alors que la seule forme

$$x^2 + 3y^2,$$

pour laquelle $a = 1$, $a' = 3$. La vérification est immédiate.

Pour $k = 11$, on a trois formes

$$x^2 + 11y^2, \quad 3x^2 + 2xy + 4y^2, \quad 3x^2 - 2xy + 4y^2,$$

et trois systèmes a, a', savoir :

$$a = 1, \quad a' = 11; \qquad a = 3, \quad a' = 5; \qquad a = 3, \quad a' = 5.$$

De là

$$\sum a(a' - a) = 1.10 + 2.3 + 2.3 = 22.$$

D'un autre côté,

$$\tfrac{2}{3}\,\mathrm{N}k = \tfrac{2}{3}.3.11 = 22.$$

Notre théorème est donc encore vérifié cette fois.

Il l'est également pour $k = 19$. Aux trois formes

$$x^2 + 19y^2, \quad 4x^2 + 2xy + 5y^2, \quad 4x^2 - 2xy + 5y^2,$$

qui se présentent alors, répondent les trois systèmes

$$a = 1, \quad a' = 19; \qquad a = 5, \quad a' = 7; \qquad a = 5, \quad a' = 7,$$

de façon que 38 est la valeur commune des deux quantités

$$\sum a(a' - a)$$

et

$$\tfrac{2}{3}\,\mathrm{N}k.$$

Enfin cette valeur commune est 54, lorsqu'on a $k = 27$, ce qui amène les trois formes

$$x^2 + 27y^2, \quad 4x^2 + 2xy + 7y^2, \quad 4x^2 - 2xy + 7y^2,$$

auxquelles répondent les trois systèmes

$$a = 1, \quad a' = 27; \qquad a = 7, \quad a' = 9; \qquad a = 7, \quad a' = 9.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces exercices numériques.

TRANSFORMATION

par polaires réciproques des propriétés relatives aux rayons de courbure;

Par M. MANNHEIM.

1. Dans une brochure sur la *Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques*, que j'ai publiée en 1857 [*], j'ai résolu deux problèmes énoncés ainsi :

1° *Transformer à l'aide de la théorie des polaires réciproques une relation métrique quelconque, sans lui faire subir aucune préparation.*

2° *Déterminer immédiatement les différentes formes sous lesquelles se serait présenté le résultat de la transformation, si l'on avait opéré sur différentes formes de la relation donnée.*

Pour résoudre le premier problème, j'ai donné l'expression d'un segment de droite au moyen des éléments de sa figure polaire réciproque. Cette expression conduit à la solution complète de la transformation des relations métriques de longueurs.

Présentée sous des formes très-diverses, en vue de la solution du second problème, cette expression permet d'arriver rapidement à des résultats simples, et par cela même intéressants; néanmoins, il est toujours utile d'examiner si l'introduction d'éléments spéciaux ne conduirait pas à des simplifications inattendues. Ce travail est un exemple à l'appui de cette observation. L'expression du rayon de courbure d'une courbe plane, devient, en effet, très-simple lorsqu'on y introduit le rayon de courbure de la polaire réciproque de cette courbe.

[*] Mallet-Bachelier, quai des Augustins 55, Paris.

On peut arriver à cette élégante expression en partant des formules démontrées dans ma brochure, mais afin de ne rien emprunter d'étranger à ce *Journal,* je la recherche directement.

Je considère ensuite les courbes gauches, isolées ou tracées sur une surface. Le problème à résoudre, quant aux rayons de courbure, est toujours la détermination d'une formule où n'entrent que des éléments de la figure polaire réciproque. Dans tous les cas, ces formules une fois obtenues, la transformation d'une propriété relative aux rayons de courbure se réduit à de simples substitutions.

N. B. — Pour les questions de Géométrie plane, je prends toujours une circonférence de cercle pour courbe directrice. Les points sont désignés par une lettre italique, leurs polaires par la même lettre majuscule romaine.

Pour la Géométrie de l'espace, la surface directrice est une sphère. Les points sont toujours désignés par une lettre italique et leurs polaires par la même lettre majuscule romaine, placée entre parenthèses.

Les droites sont désignées par une lettre majuscule romaine, sans parenthèses, et leurs polaires par la même lettre majuscule de ronde.

FORMULE DE TRANSFORMATION RELATIVE AU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE PLANE.

2. Désignons par ρ_a le rayon de courbure correspondant au point a d'une courbe plane (*fig.* 1).

La polaire du point a est la droite A qui touche la polaire réciproque de la courbe donnée en un point b; je désigne par ρ_{A} le rayon de courbure de cette polaire au point de contact b de la tangente A.

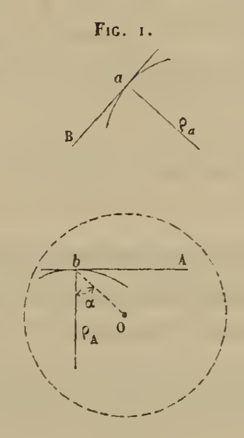
Le cercle osculateur de la courbe en a a pour polaire réciproque une conique, ayant pour foyer le centre O du cercle directeur et osculatrice en b à la polaire réciproque de la courbe donnée (115 et 73) [*].

Le rayon de ce cercle osculateur est égal à l'inverse du paramètre

[*] Les numéros de renvoi se rapportent au *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciroques* de M. Poncelet.

de cette conique [*], et comme on connaît la relation qui existe entre ce paramètre et le rayon de courbure en un point quelconque de cette

Fig. 1.



conique, on a tout de suite la formule de transformation cherchée.

Désignons par p le paramètre de la conique osculatrice, de foyer O, par ρ_A le rayon de courbure de cette courbe en b et par α l'angle que fait ce rayon avec bO; on a, par une relation établie dans la plupart des Traités de calcul différentiel,

$$p = \rho_A \cos^3 \alpha;$$

et comme, d'après ce que nous venons de dire, $\rho_a = \frac{1}{p}$, il vient

$$\rho_a = \frac{1}{\rho_A \cos^3 \alpha}.$$

Telle est la formule qui lie le rayon de courbure d'une courbe et le rayon de courbure de sa transformée polaire.

---

[*] Cette propriété, que j'ai indiquée au bas de la page 34 de ma brochure, est presque évidente lorsque l'on considère la tangente au cercle osculateur, qui est parallèle à l'axe focal de la transformée de ce cercle.

La distance du centre du cercle directeur au pôle de cette tangente, n'est autre dans la conique que l'ordonnée correspondant au foyer, c'est-à-dire le paramètre de cette courbe.

Comme nous aurons constamment à nous servir d'angles, tels que α, compris entre le rayon de courbure ρ_A et la droite bO qui joint le point b, auquel correspond ρ_A, au centre O du cercle directeur, je les désignerai par les rayons de courbure auxquels ils se rapportent.

Avec cette convention, la formule de transformation du rayon de courbure s'écrit

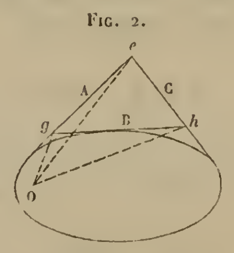
$$(1) \qquad \rho_a = \frac{1}{\rho_A \cos^3 \rho_A}.$$

3. Pour appliquer cette expression, nous allons transformer le théorème suivant, démontré à la page 165 du deuxième volume des *Applications d'Analyse et de Géométrie* de M. Poncelet.

Théorème I. — *Lorsqu'une courbe du troisième ordre est à la fois inscrite et circonscrite à un triangle abc, le produit des rayons de courbure correspondant aux sommets a, b, c est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle abc.*

Soit ABC (*fig.* 2) le triangle polaire réciproque du triangle abc par

Fig. 2.



rapport à une circonférence dont le centre est O [*]. La courbe du troisième ordre a pour transformée une courbe de troisième classe à la fois inscrite et circonscrite au triangle ABC. Le cercle circonscrit au triangle abc se transforme en une conique inscrite au triangle ABC, ayant pour foyer le point O centre du cercle directeur.

En désignant par ρ_a le rayon de courbure au point a de la courbe

[*] Je n'ai indiqué sur cette figure que le centre de la circonférence directrice; j'agirai toujours ainsi pour les figures qui suivront.

donnée du troisième ordre, on a, par la formule (1),

$$\rho_a = \frac{1}{\rho_A \cos^3 \rho_A} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho_A \sin^3(A, eO)}.$$

Les rayons de courbure ρ_b, ρ_c sont exprimés par des formules analogues. Quant au rayon du cercle qui passe par les sommets a, b, c du triangle, il est égal à $\frac{1}{p}$, p désignant le paramètre de la conique transformée de ce cercle.

La relation qui exprime le théorème I se transforme donc, en appliquant ces formules, dans la relation suivante :

$$\frac{1}{\rho_A \sin^3(A, eO) \times \rho_B \sin^3(B, gO) \times \rho_C \sin^3(C, hO)} = \frac{1}{p^3},$$

d'où

$$\rho_A \rho_B \rho_C = \frac{p^3}{\sin^3(A, eO) \sin^3(B, gO) \sin^3(C, hO)}.$$

De cette relation, je vais déduire deux propositions :

1° L'une exprime le produit des rayons de courbure d'une courbe de troisième classe, à la fois inscrite et circonscrite au triangle ABC.

2° L'autre est relative à toutes les sections coniques tangentes aux trois côtés du triangle ABC.

Je commence par cette dernière; cela me permettra d'énoncer ensuite sous une forme élégante la première proposition, qui est le résultat proprement dit de la transformation.

Le triangle ABC et la courbe de troisième classe étant donnés, la relation que nous venons de trouver est vraie, quelle que soit la conique tangente aux côtés du triangle ABC. Or le premier membre de cette relation est constant, nous voyons donc que pour une conique quelconque inscrite au triangle ABC, on a

$$\frac{p}{\sin(A, eO) \sin(B, gO) \sin(C, hO)} = \text{const.}$$

Afin de préciser, cherchons cette constante. Pour cela, consi-

dérons le cas où la conique se confond avec le cercle inscrit au triangle ABC.

Le foyer de la conique et son paramètre sont maintenant le centre et le rayon de ce cercle inscrit. Quant aux angles (A, eO), (B, gO), (C, hO) ils deviennent les demi-angles des angles A, B, C du triangle ABC.

La constante de la relation précédente est donc, en désignant par r le rayon du cercle inscrit au triangle ABC,

$$\frac{r}{\sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C}.$$

Mais on sait que cette expression est égale à quatre fois le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC, on peut donc dire :

Lemme. — *Quelle que soit la conique inscrite au triangle* ABC (*fig.* 2), *on a toujours*

$$\frac{p}{\sin(A, eO)\sin(B, gO)\sin(C, hO)} = 4R;$$

p étant le paramètre de la conique, O l'un de ses foyers et R *le rayon du cercle circonscrit au triangle* ABC.

Il est clair qu'on pourrait laisser la conique fixe et supposer variables les triangles qui lui sont circonscrits.

Je reviens maintenant à l'objet même de notre recherche. Nous avons trouvé

$$\rho_A \rho_B \rho_C = \frac{p^3}{\sin^3(A, eO)\sin^3(B, gO)\sin^3(C, hO)}.$$

Mais le deuxième membre, d'après le lemme précédent, est égal $64R^3$; nous voyons donc que :

Théorème II. — *Lorsqu'une courbe de troisième classe est à la fois inscrite et circonscrite à un triangle, le produit des rayons de courbure, correspondant aux trois sommets, est égal à 64 fois le cube du rayon du cercle circonscrit au triangle.*

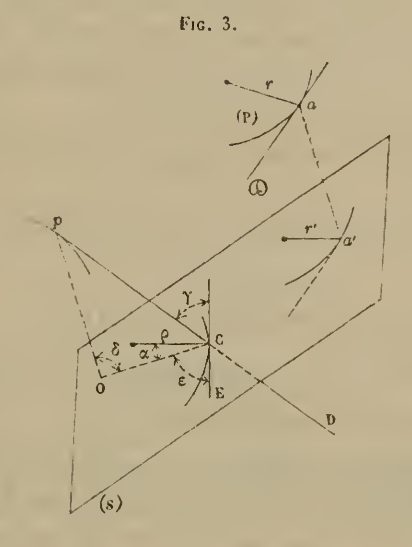
En rapprochant ce théorème du théorème I, on reconnaît que :

Une courbe de troisième ordre et de troisième classe ne peut pas être à la fois inscrite et circonscrite à un triangle.

FORMULE DE TRANSFORMATION DU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE DE L'ESPACE.

4. Soit r le rayon de courbure au point a d'une courbe gauche donnée [*].

Fig. 3.



La polaire réciproque de cette courbe est une surface développable, le plan polaire du point a touche cette surface suivant la droite D, polaire de la tangente $\mathfrak{D}$.

Le point de contact de D et de l'arête de rebroussement de la développable est le pôle du plan osculateur (P) de la courbe gauche au point a.

[*] Les résultats auxquels nous arriverons ne seront pas plus généraux que si nous considérions simplement une courbe plane dans l'espace, puisqu'il ne s'agit ici que de propriétés relatives au rayon de courbure.

Par le centre O de la sphère directrice [*], menons un plan quelconque (S); projetons la courbe donnée sur ce plan; désignons par a' la projection du point a et par r' le rayon de courbure en ce point de la projection de la courbe donnée.

On sait que

$$r' = r \frac{\cos^3 [\mathcal{D}, (S)]}{\cos [(P), (S)]}.$$

Le plan sécant (S) coupe la développable suivant une courbe, polaire réciproque de la projection de la courbe donnée sur ce plan, par rapport au grand cercle de la sphère directrice qui est sur (S).

C étant le point de rencontre de D et de (S), désignons par ρ le rayon de courbure en C de cette courbe d'intersection; en appliquant la formule (1), on a

$$r' = \frac{1}{\rho \cos^3 \rho}.$$

Substituant pour r' sa valeur en fonction de r, on obtient

$$r \frac{\cos^3 [\mathcal{D}, (S)]}{\cos [(P), (S)]} = \frac{1}{\rho \cos^3 \rho},$$

d'où

$$r = \frac{\cos [(P), (S)]}{\rho \cos^3 \rho . \cos^3 [\mathcal{D}, (S)]}.$$

La droite Op étant perpendiculaire au plan (P), l'angle de Op et de (S) est complémentaire de l'angle de (P) et de (S); la droite D étant la polaire de $\mathcal{D}$, le plan issu de O et qui contient D est perpendiculaire à $\mathcal{D}$, et par suite l'angle du plan (O, D) et du plan (S) est complémentaire de l'angle de $\mathcal{D}$ et de (S); la formule précédente peut donc s'écrire

$$(2) \qquad r = \frac{\sin [O p, (S)]}{\rho \cos^3 \rho . \sin^3 [(O, D), (S)]}.$$

Cette formule exprime r au moyen du rayon de courbure d'une section quelconque, faite dans la surface développable transformée de la courbe donnée.

[*] Nous ne figurons pas la sphère directrice.

5. On peut lui donner différentes formes.

Désignons par δ l'angle de Oc et de Op, on a

$$\frac{\sin[Op, (S)]}{\sin[(O, D), (S)]} = \sin\delta;$$

par suite,

$$(2') \qquad r = \frac{\sin\delta}{\rho\cos^3\rho . \sin^2[(O, D), (S)]}.$$

Dans le cas particulier où l'angle δ est droit, quel que soit le plan (S) mené par OC,

$$(2'') \qquad r = \frac{1}{\rho\cos^3\rho . \sin^2[(O, D), (S)]}.$$

Enfin quand le plan sécant (S) est perpendiculaire à Op, on a simplement

$$(2''') \qquad r = \frac{1}{\rho\cos^3\rho}.$$

Cette formule est évidente, si l'on remarque que dans l'hypothèse où elle a été établie le plan sécant est parallèle à (P).

6. Désignons par ε l'angle que la tangente E fait avec la droite OC : cet angle est complémentaire de l'angle α; appelons τ l'angle que le plan tangent à la surface développable le long de D fait avec le plan (O, D), et γ l'angle de D et de E.

On a

$$\frac{\sin\gamma}{\sin[(O, D), (S)]} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\tau},$$

et, par suite, la formule (2) peut s'écrire

$$(2^{\text{IV}}) \qquad r = \frac{\sin[Op, (S)]}{\rho\sin^3\gamma . \sin^3\tau}.$$

Ces différentes formules (2), (2′), (2^{IV}) expriment sous des formes diverses un théorème relatif aux rayons de courbure des sections faites dans une développable par des plans passant par un point fixe.

Si nous considérons en particulier la formule (2^{IV}), nous voyons que :

THÉORÈME III. — *Lorsqu'on coupe une surface développable* (*fig.* 3) *par un plan passant par un point fixe* O, *on a, quel que soit le plan sécant* (S),

$$\frac{\sin[Op, (S)]}{\rho \sin^3 \gamma} = \text{const.}$$

p est le point de l'arête de rebroussement situé sur la génératrice D de la développable, ρ le rayon de courbure de la courbe de section au point de rencontre du plan (S) et de (D), enfin γ est l'angle que fait cette courbe avec D.

On peut déduire de ce théorème la relation qui existe entre le rayon de courbure d'une courbe et le rayon de courbure de sa perspective. Il suffit pour cela de l'appliquer au cône perspectif de la courbe donnée, et de considérer, comme plans sécants de ce cône, le plan osculateur de la courbe donnée et le plan du tableau de la perspective. En opérant ainsi, on retrouve une élégante formule, qui a été donnée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* t. XX, p. 428, par M. Peaucellier, capitaine du Génie.

En se servant des formules (2), (2′), etc., comme nous avons fait de la formule (1) dans notre premier exemple, les théorèmes relatifs aux rayons de courbure des courbes gauches conduiront à des théorèmes relatifs aux surfaces développables.

Je vais, comme application de ces formules, considérer les courbes tracées sur une surface.

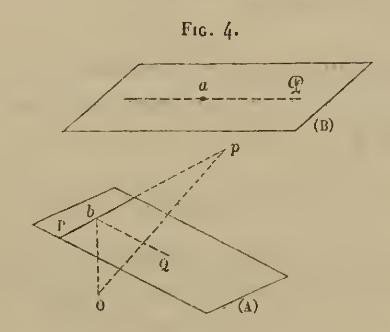
FORMULE DE TRANSFORMATION DU RAYON DE COURBURE D'UNE SECTION PLANE NORMALE EN UN POINT D'UNE SURFACE ET DES RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX AU MÊME POINT.

7. Soient a (*fig.* 4) le point où le plan (B) touche une surface donnée, $\mathfrak{T}$ la trace sur (B) du plan d'une section normale. Nous nous proposons de trouver, pour le rayon de courbure de cette section, la formule de transformation polaire.

Soient O le centre de la sphère directrice, b le pôle de (B), (A) le plan polaire de a et P la droite polaire de la droite $\mathfrak{T}$.

Le plan de la section normale, qui a pour trace $\mathfrak{P}$, a pour pôle le point p de la droite P, tel que Op est perpendiculaire à Ob, puisque le plan de cette section est perpendiculaire à (B).

Fig. 4.



La section normale elle-même a pour polaire réciproque un cône, circonscrit à la transformée de la surface donnée, dont le sommet est au point p. La courbe de contact de ce cône a pour tangente en b la droite Q, conjuguée de P.

Le rayon de courbure de la section normale s'exprime, d'après ce qui précède, au moyen du rayon de courbure d'une section faite dans le cône qui lui correspond par un plan issu de O.

Désignons par r le rayon de courbure de la section normale, et par ρ le rayon de courbure de la section faite dans le cône par le plan qui contient la droite Q.

En appliquant la formule (2″), Ob étant perpendiculaire à Op, on a

$$(3) \qquad r = \frac{1}{\rho \cos^3 p . \sin^2[(O, P), (O, Q)]}.$$

Remarquons que ρ est aussi le rayon de courbure de la section faite par le plan (O, Q) dans la surface polaire de la surface donnée [*], et si nous appelons *plans conjugués* deux plans tels que (O, P), (O, Q), issus de O et passant par deux tangentes conjuguées, nous voyons en définitive que : le rayon de courbure d'une section normale s'exprime

[*] On sait en effet que toutes les sections faites à la fois dans deux surfaces circonscrites l'une à l'autre par un plan tangent à la ligne de contact, sont mutuellement osculatrices. (*Développements de Géométrie* de M. Dupin, p. 36.)

au moyen du rayon de courbure de la section faite dans la surface polaire par le plan (O, Q), issu du centre O de la sphère directrice et conjugué du plan (O, P), qui contient la polaire réciproque P de la tangente $\mathfrak{T}$ à la section normale.

8. Dans le cas particulier où l'on considère une section principale en désignant par R'_1 le rayon de courbure principal correspondant, la formule (3) se réduit à

$$R'_1 = \frac{1}{\rho_1 \cos^3 \rho_1}, \tag{4}$$

ρ_1 étant ce que devient le rayon de courbure ρ; l'angle [(O, P), (O, Q)] est égal à un droit, puisque les plans conjugués sont ici rectangulaires [*].

Les rayons de courbure principaux au point où le plan (B) touche une surface donnée, sont donc exprimés au moyen des rayons de courbure des sections, faites dans la transformée par les deux plans conjugués rectangulaires qui contiennent le pôle du plan (B).

9. Je reviens au rayon de courbure d'une section normale quelconque menée par $a\mathfrak{T}$ (*fig.* 4), et je vais montrer qu'on peut l'exprimer au moyen du rayon de courbure de la section déterminée dans la surface polaire par le plan (O, P).

Pour cela, il est nécessaire d'établir un théorème, auquel nous allons arriver en appliquant les formules (3) et (4) à la transformation du théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Deux plans conjugués normaux en un point d'une surface donnée, déterminent deux sections, dont les rayons de courbure r, r' sont liés aux rayons de courbure principaux en ce point par la relation*

$$rr' \sin^2\theta = R'_1 R'_2 ;$$

---

[*] Deux tangentes conjuguées $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}$, ont pour polaires réciproques deux tangentes conjuguées T, S (96). Les plans conjugués qui contiennent les droites T, S sont perpendiculaires aux premières $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}$, et par conséquent comprennent entre eux l'angle de ces droites. Par suite, à deux tangentes conjuguées rectangulaires correspondent des tangentes conjuguées situées dans des plans conjugués rectangulaires.

où θ est l'angle des plans conjugués et R'_1, R'_2 les rayons de courbure principaux [*].

Désignons par (B) le plan tangent au point considéré sur la surface donnée. Les traces des plans conjugués sur ce plan tangent sont des tangentes conjuguées comprenant entre elles l'angle θ. Les polaires de ces droites sont des tangentes conjuguées, qui déterminent avec le centre O de la sphère directrice des plans conjugués, passant par le pôle b de (B) et comprenant aussi entre eux l'angle θ.

Soient ρ et ρ' les rayons de courbure des sections déterminées par ces plans conjugués dans la surface polaire, et ρ_1, ρ_2 les rayons de courbure des sections déterminées dans la même surface par les plans conjugués passant par b et rectangulaires entre eux.

En appliquant les formules (3) et (4) à la transformation de la relation

$$rr' \sin^2\theta = R'_1 R'_2,$$

il vient

$$\frac{\sin^2\theta}{\rho\cos^3\rho.\sin^2\theta\rho'.\cos^3\rho'.\sin^2\theta} = \frac{1}{\rho_1\cos^3\rho_1.\rho_2\cos^3\rho_2},$$

d'où

$$\rho\rho'\cos^3\rho.\cos^3\rho'.\sin^2\theta = \text{const.}$$

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème V. — *Lorsque deux plans conjugués tournent autour de leur intersection, on a toujours*

$$\rho\rho'\cos^3\rho.\cos^3\rho'.\sin^2\theta = \text{const.}$$

Ce théorème, qui est une généralisation du théorème IV, conduit tout de suite à une nouvelle formule de transformation du rayon de courbure d'une section normale.

La relation qui l'exprime peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho\cos^3\rho.\sin^2\theta} = \frac{\rho'\cos^3\rho'}{\rho_1\cos^3\rho_1.\rho_2\cos^3\rho_2}.$$

---

[*] Ce théorème résulte de ce que pour l'indicatrice au point considéré, l'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante.

Mais le premier membre de cette relation est l'expression de r telle que la donne la formule (3); on a donc aussi

$$(3') \qquad r = \frac{\rho' \cos^3 \rho'}{\rho_1 \cos^3 \rho_1 . \rho_2 \cos^3 \rho_2}.$$

Dans cette formule ρ' est le rayon de courbure de la section faite dans la surface polaire par le plan qui contient la polaire réciproque de la tangente menée à la section normale donnée par l'extrémité du rayon de courbure r. Appliquons cette formule à la transformation de la relation d'Euler.

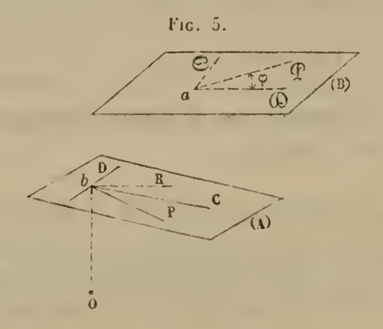
TRANSFORMATION DE LA RELATION D'EULER.

10. Écrivons ainsi cette relation

$$(a) \qquad \frac{1}{r_0} = \frac{\cos^2 \varphi}{R'_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R'_2}.$$

R'_1 et R'_2 sont les rayons de courbure principaux en a (*fig.* 5); R'_1 est

Fig. 5.



dans le plan principal, qui a pour trace $\mathfrak{D}$ sur le plan (B) tangent en a à la surface donnée; R'_2 est dans le plan principal, qui passe par $\mathfrak{C}$; r_0 est le rayon de courbure de la section normale qui contient $\mathfrak{P}$.

Soit (A) le plan polaire de a, ce plan touche la surface polaire réciproque de la surface donnée au point b, pôle de (B).

Les droites P, C, D contenues dans le plan (A) sont les polaires des droites $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$; les plans (O, C), (O, D) sont des plans conjugués rec-

tangulaires; le plan (O, P) fait avec le plan (O, D) un angle φ, égal à l'angle compris entre les droites $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$.

Transformons la relation (a), en appliquant les formules (3') et (4); il vient

$$\frac{\rho_1 \cos^3\rho_1 . \rho_2 \cos^3\rho_2}{\rho_0 \cos^3\rho_0} = \rho_2 \cos^3\rho_2 . \cos^2\varphi + \rho_1 \cos^3\rho_1 . \sin^2\varphi,$$

d'où

$$(b) \qquad \frac{1}{\rho_0 \cos^3\rho_0} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1 \cos^3\rho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2 \cos^3\rho_2}.$$

Cette relation est tout à fait analogue à la relation d'Euler, elle lie le rayon de courbure d'une section oblique quelconque, déterminée dans la surface polaire par le plan (O, P) aux rayons de courbure des sections faites par les plans conjugués rectangulaires (O, C), (O, D) [*].

Les trois plans (O, P), (O, C), (O, D) passent par la même droite Ob; dans le cas particulier où cette droite est une normale à la surface polaire, la relation (b) se réduit à la relation (a).

11. On peut écrire cette relation (b) sous une autre forme.

Considérons les coniques ayant pour foyer le point O, et qui sont osculatrices en b à la surface polaire.

La conique qui est dans le plan (O, P) a pour paramètre p_0, qui est égal à $\rho_0 \cos^3\rho_0$; en désignant par p_1 et p_2 les paramètres des coniques qui sont dans les plans conjugués rectangulaires, on a aussi

$$p_1 = \rho_1 \cos^3\rho_1, \quad p_2 = \rho_2 \cos^3\rho_2.$$

La relation (b) devient alors

$$(c) \qquad \frac{1}{p_0} = \frac{\cos^2\varphi}{p_1} + \frac{\sin^2\varphi}{p_2}.$$

Les paramètres p_1 et p_2 sont, l'un le paramètre maximum, l'autre le paramètre minimum parmi les paramètres de toutes les sec-

---

[*] Les angles ρ_0, ρ_1 et ρ_2 de la relation (b) sont liés entre eux de la manière suivante :

$$\frac{1}{\cot\rho_0} = \frac{\cos\varphi}{\cot\rho_1} + \frac{\sin\varphi}{\cot\rho_2}.$$

tions coniques osculatrices que nous considérons; p_1 et p_2 jouent donc ici le même rôle que les rayons de courbure principaux dans la relation d'Euler.

Les coniques qui ont pour paramètres p_1 et p_2 sont dans les plans conjugués rectangulaires, qu'on pourrait appeler *plans conjugués principaux* à cause de leur complète analogie avec les plans principaux.

On peut écrire la relation (c), en prenant pour foyer commun des coniques osculatrices, un point quelconque de la droite autour de laquelle on fait tourner les plans sécants; si le point choisi est à l'infini, ces coniques deviennent les paraboles osculatrices, dont les axes sont parallèles à la droite donnée, et la relation (c) conserve toujours la même forme.

12. On peut appliquer les formules $(3')$ et (4) à la transformation de la relation (b), et généraliser ainsi la relation d'Euler; mais je vais simplement transformer la relation (c) en replaçant le centre de la sphère directrice au foyer commun de toutes les coniques osculatrices.

Ces coniques ont pour transformées des cylindres de révolution osculateurs de cylindres circonscrits à la surface polaire, qui, par suite de la position donnée au centre de la sphère directrice, n'est autre que la surface primitive (*fig.* 5).

L'osculation a lieu le long de génératrices situées dans le plan (B) tangent à cette surface primitive.

Les plans conjugués rectangulaires, qui contiennent les coniques dont les paramètres sont p_1 et p_2, sont respectivement perpendiculaires aux axes de l'indicatrice en a : $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Ces paramètres p_1 et p_2 sont égaux aux inverses des rayons de courbure des sections normales aux cylindres circonscrits à la surface primitive, ayant pour génératrices des droites parallèles à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, rayons de courbure correspondant aux points de ces sections qui sont dans (B). De même p_0 est égal à l'inverse du rayon de courbure de la section droite du cylindre, circonscrit à la surface primitive, et dont les génératrices sont parallèles à $\mathcal{T}$, pour le point de cette section qui est dans (B).

On a donc, pour l'expression du rayon de courbure de la section droite de ce dernier cylindre, la relation transformée de (c), c'est-à-dire, en appelant r'_0, R'_1, R'_2 les rayons de courbure des sections per-

pendiculaires à $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{Q}$,

$$(d) \qquad r'_0 = R'_2 \cos^2\varphi + R'_1 \sin^2\varphi.$$

Cette relation donne le rayon de courbure en un point du contour apparent d'une surface projetée sur un plan, en fonction des rayons de courbure principaux au point de la surface, dont celui-ci est la projection, et de l'angle de la projetante avec l'un des axes de l'indicatrice au même point de la surface.

13. Nous allons déduire de cette relation un théorème utile.

Projetons une surface sur deux plans perpendiculaires entre eux, et perpendiculaires au plan (B), tangent en a à la surface donnée. Nous obtiendrons sur chacun de ces plans le contour apparent de la surface. Désignons par r et r' les rayons de courbure qui correspondent aux projections du point a; on a

$$r = R_2 \cos^2\varphi + R_1 \sin^2\varphi,$$

$$r' = R_2 \sin^2\varphi + R_1 \cos^2\varphi,$$

d'où, en ajoutant,

$$r + r' = R_1 + R_2;$$

d'après cela :

Théorème VI. — *La somme des rayons de courbure des contours apparents d'une surface sur deux plans, rectangulaires entre eux et perpendiculaires à un plan tangent fixe de cette surface, est constante, quels que soient les plans rectangulaires sur lesquels on effectue les projections.*

Au moyen de ce théorème on étend facilement au cas de l'espace certains théorèmes démontrés pour les courbes planes [*].

14. Au moyen de la relation (b), on arrive au théorème suivant,

---

[*] On démontre directement le théorème VI à l'aide de la remarque suivante : *Pour un point quelconque de la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à une surface, le produit du rayon de courbure de la section droite du cylindre par le rayon de courbure de la section normale de la surface, menée par la génératrice du cylindre, est égal au produit des rayons de courbure principaux relatifs au point considéré.*

qu'on peut obtenir aussi en transformant par polaires réciproques le théorème VI.

Théorème VII. — *Deux plans rectangulaires se coupent suivant une droite fixe qui rencontre en a une surface donnée; ils déterminent dans cette surface deux sections ayant pour rayons de courbure en a : ρ_0 et ρ'_0; l'expression*

$$\frac{1}{\rho_0 \cos^3 \rho_0} + \frac{1}{\rho'_0 \cos^3 \rho'_0}$$

est constante, quelle que soit l'orientation des plans sécants rectangulaires [*].

Ces quelques exemples me paraissent suffire pour donner une idée de l'emploi qu'on peut faire des formules de transformation établies dans ce travail.

---

[*] Les angles que nous désignons par ρ_0 et ρ'_0 sont liés entre eux de telle manière que

$$\operatorname{tang}^2 \rho_0 + \operatorname{tang}^2 \rho'_0 = \text{const.}$$

SUR LA FORME

$x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. Je veux communiquer dans cette Note un théorème au sujet de la forme

$$x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2,$$

où l'entier constant a est un nombre premier de l'une ou de l'autre des deux formes $6l + 1$, $6l - 1$. Ce théorème consiste en ce que, si l'on s'est procuré par un moyen quelconque la valeur du nombre

$$N(q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2)$$

des représentations d'un entier q, non multiple de a, par la forme

$$x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2,$$

il sera toujours facile d'en conclure le nombre

$$N(a^\alpha q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2)$$

des représentations (par cette même forme) de l'entier

$$a^\alpha q,$$

qui résulte du produit de q et d'une puissance de a. Nous parlons ici du nombre total des représentations tant propres qu'impropres, en sorte que

$$N(a^\alpha q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2)$$

exprime le nombre des solutions que l'équation

$$a^\alpha q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2$$

comporte quand on admet pour valeurs de x, y, z, t tous les entiers possibles, positifs, nuls ou négatifs, eussent-ils un diviseur commun > 1.

2. Le cas de a premier $6l-1$, c'est-à-dire non diviseur de x^2+3y^2, est très-facile. Alors en effet l'équation

$$a^\alpha q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2$$

ne peut avoir lieu, avec un exposant $\alpha > 0$, qu'autant que x et y sont tous les deux divisibles par a. On pourra donc faire $x = ax_1$, $y = ay_1$, x_1 et y_1 étant des entiers, d'où l'on conclura que l'équation proposée se ramène à celle-ci

$$a^{\alpha-1} q = z^2 + 3t^2 + ax_1^2 + 3ay_1^2,$$

qui est de même forme, mais où l'exposant de a dans le premier membre est moindre d'une unité. Ayant ainsi reconnu que la valeur de

$$\mathrm{N}\,(a^\alpha q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2)$$

est égale à celle de

$$\mathrm{N}\,(a^{\alpha-1} q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2),$$

on en conclura, en continuant, qu'elle ne dépend pas de l'exposant et qu'elle ne diffère pas de celle de

$$\mathrm{N}\,(q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2)$$

qu'on suppose donnée.

3. Désormais donc nous ne considérerons plus qu'un nombre premier a de la forme

$$6l + 1.$$

Cela étant, je dis que l'on peut sans inconvénient supposer q non divisible par 3. En effet l'équation

$$3q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2$$

ne peut avoir lieu, vu la forme indiquée de a, qu'en prenant x et z multiples de 3; dès lors, en posant $x = 3x'$, $z = 3z'$, on se débarrassera du facteur 3 par la division sans que le second membre change de forme, et il suffirait de répéter cette opération plusieurs fois, si 3 se présentait avec un exposant plus élevé.

Ce qui précède compris, a étant premier $6l+1$, q étant premier à $3a$, je ne m'occupe du nombre

$$\mathrm{N}\,(a^\alpha q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2)$$

qu'en tant qu'il dépend de α, et je le désigne par

$$\psi(\alpha);$$

en particulier je fais

$$\mathrm{N}\,(q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2) = \psi(0).$$

La valeur de

$$\psi(0)$$

est supposée connue, et il s'agit d'en déduire celle de

$$\psi(\alpha).$$

Soit

$$q = 2^\mu m,$$

m étant un entier impair naturellement premier à $3a$ comme l'était q lui-même; nous distinguerons deux cas, suivant que l'on aura $\mu = 0$, partant $q = m$, ou bien au contraire $\mu > 0$.

4. Qu'il s'agisse d'abord d'un entier impair $q = m$. Je trouve qu'il existe alors entre les deux fonctions consécutives

$$\psi(\alpha), \quad \psi(\alpha+1)$$

la relation suivante

$$\psi(\alpha+1) + \psi(\alpha) = \frac{8(a^{\alpha+1}-1)}{a-1}\,\zeta_1(m),$$

où

$$\zeta_1(m)$$

désigne comme d'ordinaire la somme des diviseurs de m. Cette relation n'est autre chose qu'une équation aux différences finies très-facile à intégrer, et l'on en tire

$$\psi(\alpha) = \frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1}\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{4}{a+1}\zeta_1(m)\right].$$

Telle est donc la valeur de

$$\mathrm{N}\,(a^\alpha m = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2),$$

celle de ψ (o) étant

$$\mathrm{N}\,(m = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2).$$

Soit, comme exemple, $m = 1$; on aura alors

$$\zeta_1(m) = 1, \quad \psi(0) = 2,$$

et notre formule donnera

$$\psi(\alpha) = \frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{2a - 2}{a+1}(-1)^\alpha.$$

La valeur de

$$\mathrm{N}\,(a^\alpha = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2)$$

s'exprime donc par

$$\frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{2a - 2}{a+1}(-1)^\alpha,$$

quel que soit l'exposant α. Pour $\alpha = 1$, on trouve, comme il était aisé de le prévoir,

$$\mathrm{N}\,(a = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2) = 6.$$

Pour $\alpha = 2$, on obtient

$$\mathrm{N}\,(a^2 = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2) = 8a + 2.$$

Et ainsi de suite.

5. Considérons maintenant un entier pair, $q = 2^\mu m$. L'exposant μ étant > 0, la relation qu'on trouve encore entre deux fonctions consécutives

$$\psi(\alpha), \quad \psi(\alpha+1)$$

devient

$$\psi(\alpha+1)+\psi(\alpha)=\frac{8(2^{\mu+1}-3)(a^{\alpha+1}-1)}{a-1}\zeta_1(m).$$

Cette équation aux différences finies est plus compliquée que la précédente, mais dans son second membre seulement, et si l'on pose

$$(2^{\mu+1}-3)\zeta_1(m)=\varpi_\mu(m),$$

elle n'en diffère plus que par le changement de

$$\zeta_1(m)$$

en

$$\varpi_\mu(m).$$

En l'intégrant, on aura donc

$$\psi(\alpha)=\frac{4(2a^{\alpha+1}-a-1)}{a^2-1}\varpi_\mu(m)+(-1)^\alpha\left[\psi(0)-\frac{4}{a+1}\varpi_\mu(m)\right].$$

Dans le cas de

$$\mu > 0,$$

la valeur générale de

$$\mathrm{N}\,(2^\mu a^\alpha m = x^2+3y^2+az^2+3at^2)$$

s'exprime donc par

$$\frac{4(2a^{\alpha+1}-a-1)}{a^2-1}\varpi_\mu(m)+(-1)^\alpha\left[\psi(0)-\frac{4}{a+1}\varpi_\mu(m)\right].$$

Prenons, par exemple,

$$\mu = 1,$$

en sorte qu'il ne s'agisse que d'entiers impairement pairs. Nous aurons dans ce cas

$$\varpi_\mu(m)=\zeta_1(m).$$

Il faut en conclure que la valeur de

$$\mathrm{N}\left[2a^{\alpha}m = x^2 + 3y^2 + a(z^2 + 3t^2)\right]$$

est

$$\frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1}\zeta_1(m) + (-1)^{\alpha}\left[\psi(0) - \frac{4}{a+1}\zeta_1(m)\right].$$

Cette valeur, semblable en apparence à celle que nous avons donnée pour

$$\mathrm{N}(a^{\alpha}m = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2)$$

au n° **4**, fournira néanmoins des résultats très-différents parce que la valeur de $\psi(0)$ n'est pas la même de part et d'autre. Au n° **4**, où l'on s'occupait d'entiers impairs, on avait

$$\psi(0) = \mathrm{N}(m = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2),$$

tandis qu'ici, traitant d'entiers impairement pairs, on doit prendre

$$\psi(0) = \mathrm{N}(2m = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2).$$

Ainsi, en particulier, pour $m = 1$, on avait tout à l'heure $\zeta_1(m) = 1$ et $\psi(0) = 2$. Ici on aura encore $\zeta_1(m) = 1$, mais $\psi(0) = 0$; d'où l'on pourra conclure pour

$$\mathrm{N}\left[2a^{\alpha} = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2\right]$$

l'expression que voici :

$$\frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} - \frac{4}{a+1}(-1)^{\alpha}.$$

Je ne crois pas avoir besoin d'insister davantage sur ces détails qui ne peuvent offrir au lecteur aucune difficulté.

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. C. Jordan *intitulé :* Recherches sur les polyèdres ;

Par M. BERTRAND.

(Commissaires : MM. Chasles, Serret, Bertrand. — *Comptes rendus*, t. LXII, p. 1268.)

Le Mémoire de M. Jordan est relatif à une question intéressante et nouvelle qu'il a eu à la fois le mérite de poser le premier et de résoudre d'une façon très-heureuse.

Si l'on cherche, sans le secours d'un modèle en relief, à faire la description d'un polyèdre en mentionnant la forme et l'ordre de succession de ses diverses faces, arêtes ou sommets, il arrivera en général que chacun de ces éléments jouera un rôle distinct et spécial, sans pouvoir être confondu avec aucun autre, et cela indépendamment de toute mesure numérique et en raison seulement de l'ordre dans lequel se succèdent les faces, arêtes et sommets enchaînés autour de lui. Il y a cependant de nombreuses exceptions, et il peut arriver de bien des manières que la description verbale d'un polyèdre reste la même quand on change le premier sommet autour duquel tous les autres sont considérés comme groupés. C'est l'étude de ce nouveau genre de symétrie que M. Jordan s'est proposée dans le Mémoire dont nous avons à rendre compte à l'Académie, et qu'il a su faire avec beaucoup de bonheur et d'habileté. Il convient, avant tout, de préciser, comme l'auteur le fait au début de son Mémoire, le mode de description dont il est ici question.

Soit M, dit-il, un sommet de polyèdre, MN une de ses arêtes. Un observateur placé en M, sur la surface extérieure du polyèdre, et regardant dans la direction MN, verra les arêtes, faces et sommets divers s'enchaîner les uns aux autres suivant un certain ordre que j'appellerai, pour abréger, *l'aspect* du polyèdre relativement à l'arête MN et au sommet M.

Cette définition un peu vague, ajoute M. Jordan, peut être précisée

de la manière suivante. Supposons l'observateur situé sur l'arête MN en un point très-voisin de M extérieurement au polyèdre; supposons qu'il se mette à tourner dans le sens direct autour du point M, en restant toujours sur la surface extérieure du polyèdre. Il traversera successivement une série de faces μ, ν, π, etc., auxquelles il donnera la série des numéros successifs 1, 2, 3, etc. Il numérotera de même les arêtes MN, MP,.... dans l'ordre où il les rencontre; quant aux sommets, l'origine M portera le n° 1, et les extrémités des arêtes MN, MP,... recevront successivement les n°s 2, 3, etc.

Cela fait, l'observateur se transportera sur l'arête MN dans les environs du point N, et se mettra à décrire sur la surface extérieure du polyèdre un petit contour autour de N; les faces qu'il traverse et qui ne sont pas encore numérotées recevront des numéros à la suite des précédents. De même pour les arêtes nouvelles, dans l'ordre où on les traverse. A mesure qu'on numérote une arête nouvelle, on numérote également son extrémité.

On se transportera ensuite au point P, où l'on opérera de même, et l'on continuera en se transportant successivement aux divers sommets dans l'ordre où ils sont inscrits, sur celle des arêtes déjà numérotées et passant par le sommet dont le numéro d'ordre est le moindre. A mesure qu'on traverse une face ou une arête nouvelle, on la numérote à la suite; on numérote aussi les sommets qui sont à l'extrémité de ces arêtes nouvelles lorsqu'ils n'ont pas été déjà enregistrés.

En opérant de la sorte, on évite toute ambiguïté, et l'aspect du polyèdre pourra être ainsi défini : la relation entre le numéro d'ordre de chaque arête, ceux de ses deux extrémités et ceux des deux faces qu'elle borde, telle qu'elle est donnée par le tableau comparatif que l'on peut dresser aisément.

Soit A le nombre des arêtes du polyèdre, l'observateur peut se placer sur l'une quelconque d'entre elles, en une de ses deux extrémités choisie à volonté. Le polyèdre peut donc être envisagé sous 2 A aspects en général différents, mais plusieurs peuvent être semblables entre eux, et la classification des diverses manières possibles est le but du travail de M. Jordan.

Les définitions suivantes sont nécessaires pour l'intelligence de l'énoncé des résultats obtenus.

Les faces et sommets du polyèdre sont réunis sous le nom générique d'*éléments* par opposition aux arêtes.

Deux polyèdres sont dits *pareils* si, en choisissant convenablement dans chacun d'eux un premier sommet et une première arête, on peut faire en sorte qu'ils présentent un aspect semblable ; si plusieurs aspects d'un même polyèdre sont semblables entre eux, les éléments ou arêtes qui portent les mêmes numéros sous les divers aspects sont dits pareils.

Un élément ou arête sera dit n fois répété si le nombre des éléments ou arêtes pareils est égal à n.

Si les deux aspects relatifs à une même arête sont semblables, le polyèdre sera dit *symétrique par retournement* autour de cette arête. Si un élément présente le même numéro par rapport à k aspects semblables entre eux, on dira qu'il y a symétrie par rotation d'ordre k autour de cet élément.

Ces définitions établies, les principaux résultats obtenus par M. Jordan se résument dans les propositions suivantes :

Les diverses sortes de symétrie que peut présenter un polyèdre P sont au nombre de cinq.

1° *Symétrie par rotation.* — Solides présentant deux éléments singuliers, dont chacun est unique de son espèce et doué d'une symétrie de rotation d'ordre k; les autres éléments ou arêtes sont tous k fois répétés.

L'entier k peut être quelconque. S'il se réduit à deux, l'un des éléments singuliers ou tous les deux peuvent être remplacés par des arêtes à retournement.

2° *Symétrie par rotation et renversement.* — Solides présentant : 1° un système de deux éléments pareils E et E', seuls de leur espèce et doués d'une symétrie de rotation d'ordre k; 2° deux autres systèmes d'éléments ou d'arêtes remarquables composés chacun, soit de k éléments pareils doués de symétrie de rotation binaire, soit de k arêtes pareilles, douées de la symétrie de retournement dont les autres éléments ou arêtes sont $2k$ fois répétés.

L'entier k peut être quelconque. S'il se réduit à deux, les éléments E et E' peuvent être remplacés par des arêtes à retournement.

Les trois autres classes dérivent des polyèdres réguliers par le procédé suivant :

Prenons un polyèdre *pareil* à l'un des polyèdres réguliers : rempla-

çons les arêtes par des lignes polygonales, ou plus généralement par des fuseaux à facettes polyédriques pareils entre eux et présentant une symétrie de rotation binaire autour d'un de leurs éléments, ou une symétrie de retournement autour d'une de leurs arêtes; remplaçons de même les faces par des calottes polyédriques pareilles entre elles et présentant autour d'un de leurs éléments une symétrie par rotation dont l'ordre soit égal au nombre des côtés de la face (ces calottes peuvent se réduire à de simples points) ; nous aurons reconstitué ainsi ou les polyèdres cherchés ou leurs polaires.

Cette construction donne trois types différents, dont le premier se rattache au tétraèdre, le second au cube ou à l'octaèdre, le troisième enfin au dodécaèdre ou à l'icosaèdre, la substitution de l'un de ces solides à l'autre revenant à substituer des sommets aux faces, et réciproquement.

M. Jordan prouve enfin que ce mode de symétrie relatif au nombre et à l'ordre est corrélatif d'une symétrie parfaite et toujours possible, et qu'étant donné un polyèdre P pareil à lui-même sous plusieurs aspects, on pourra toujours trouver une infinité de polyèdres à faces planes ou gauches, pareils à P et exactement superposables à eux-mêmes sous les mêmes aspects.

Les polyèdres superposables à eux-mêmes, auxquels ceux que considère M. Jordan se trouvent ainsi rattachés par lui, ont été considérés déjà par Bravais sous le nom de *polyèdres sphéroédriques*, dans ses très-belles et très-importantes *Recherches sur la théorie des polyèdres*. Ce rapprochement, loin de rien enlever à l'intérêt de la théorie nouvelle, doit être considéré plutôt comme lui donnant un nouveau prix. Le Mémoire de M. Jordan, très-intéressant par ses résultats, montre chez son auteur, en même temps qu'une grande perspicacité, une rare habileté dans l'emploi des considérations géométriques les plus délicates, et l'Académie ne saurait trop encourager l'auteur à persévérer dans cette voie où il a su, dans une question tout élémentaire et placée en quelque sorte au seuil de la science, déployer un véritable talent de géomètre.

Le Mémoire de M. Jordan nous semble très-digne d'être approuvé par l'Académie et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. BESGE PAR M. J. LIOUVILLE.

« ... J'aurai à vous parler de formes quadratiques, primitives ou non, dont un au moins des coefficients extrêmes devra être impair. Il s'agit de formes binaires et celles que j'indique sont les seules qui puissent représenter des nombres impairs. Permettez-moi donc, pour abréger, de les appeler tout simplement *formes impaires*.

» Sous le bénéfice de cette convention, soit k un entier donné, positif et $\equiv 3 \pmod{8}$; et désignons par $F(k)$ le nombre des classes de formes impaires, primitives ou non, dont le déterminant est égal à $-k$. On trouvera sans peine $F(3) = 1$, puis

$$F(11)=3,\quad F(19)=3,\quad F(27)=4,\quad F(35)=6,\quad F(43)=3,\ \text{etc.};$$

la valeur de $F(27)$ résulte, par exemple, de ce que l'on a pour le déterminant -27 les quatre formes impaires distinctes

$$x^2+27y^2,\quad 3x^2+9y^2,\quad 3x^2+2xy+7y^2,\quad 3x^2-2xy+7y^2,$$

dont la seconde doit être comptée ici, quoique non primitive. Pour aller plus loin dans le calcul de $F(k)$, on possède aujourd'hui des procédés commodes.

» Maintenant considérons la suite décroissante de nombres positifs

$$k,\quad k-4.1^2,\quad k-4.2^2,\quad k-4.3^2,\ldots,\quad k-4\omega^2,$$

ω étant le plus grand entier, pair ou impair, qu'on puisse prendre en laissant

$$k-4\omega^2>0.$$

Les nombres dont il s'agit sont tous $\equiv 3 \pmod{4}$, mais alternativement $\equiv 3$, puis $\equiv 7 \pmod{8}$; le premier k étant $\equiv 3 \pmod{8}$,

comme on l'a dit plus haut. Soit h un quelconque de ces nombres k, $k - 4.1^2$, etc., et considérons non plus toutes les classes de formes quadratiques impaires de déterminant $-h$, mais seulement parmi ces classes celles qui sont ambiguës. Elles se rangeront en deux catégories bien distinctes, suivant que le plus petit entier qu'elles peuvent représenter, et qui est toujours impair, sera $\equiv 1 \pmod{4}$ ou au contraire $\equiv 3 \pmod{4}$. Supposons qu'il y ait n_1 classes appartenant à la première catégorie et n_2 appartenant à la seconde catégorie quand $h = k$, c'est-à-dire quand il s'agit du déterminant $-k$. Supposons ensuite que, pour l'ensemble des autres valeurs de h, savoir

$$k - 4.1^2, \quad k - 4.2^2, \ldots, \quad k - 4\omega^2,$$

auxquelles répondent des déterminants toujours négatifs, mais numériquement plus petits que k, on obtienne p_1 classes rentrant dans la première catégorie et p_2 rentrant dans la seconde. Enfin, soit

$$\varepsilon = n_1 - n_2 + 2(p_1 - p_2).$$

Vous voyez que les classes de formes appartenant au déterminant $-k$ dans l'une ou dans l'autre des deux catégories indiquées ci-dessus ne sont comptées qu'une fois, tandis que celles qui se rapportent aux déterminants suivants sont comptées deux fois dans le calcul de ε.

» Cela posé, j'ai reconnu qu'il existe une relation bien simple entre le nombre ε, ainsi déduit de la considération de nos deux catégories de formes ambiguës, et le nombre $F(k)$ des classes de formes quadratiques impaires de déterminant $-k$. J'ai trouvé, en effet, que l'on a toujours

$$\text{(A)} \qquad \varepsilon = F(k).$$

Il me semble que le théorème exprimé par cette équation n'est pas indigne d'intérêt. On le conclut, du reste, aisément, d'une formule que j'ai donnée (cahier de février 1862, p. 44, lig. 2) dans une lettre adressée à M. Hermite. La formule à laquelle je fais allusion conduit en outre à d'autres conséquences curieuses dont je n'ai pas à parler pour le moment.

» Revenant à nos classes de formes ambiguës impaires et aux deux

catégories entre lesquelles elles se partagent, représentons par N_1 le nombre complet de celles qui appartiennent à la première catégorie et par N_2 le nombre complet de celles qui appartiennent à la seconde catégorie. Nous aurons évidemment

$$N_1 = n_1 + p_1, \quad N_2 = n_2 + p_2,$$

d'où l'on conclura sans peine que l'équation (A) pourrait être remplacée par celle-ci

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{2}[F(k) + n_1 - n_2].$$

Mais la manière la plus nette d'exprimer notre théorème serait peut-être d'écrire

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}[F(k) + n_2 - n_1];$$

alors le second membre ne dépendrait que du déterminant $-k$, et le premier de déterminants négatifs à valeur numérique moindre.

» Quoi qu'il en soit, vérifions l'équation

$$\varepsilon = F(k)$$

sur quelques exemples, en laissant de côté celui de $k = 3$ pour lequel la vérification est immédiate.

» Quand $k = 11$, comme on a

$$11 - 4.1^2 = 7,$$

les formes ambiguës à considérer sont

$$x^2 + 11y^2, \quad x^2 + 7y^2.$$

De la première, on conclut que

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 0;$$

de la seconde, que

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 0.$$

Donc $\varepsilon = 3$, partant $\varepsilon = F(11)$, comme le veut notre théorème.

» Pour $k = 19$, comme on a

$$19 - 4.1^2 = 15, \quad 19 - 4.2^2 = 3,$$

les formes ambiguës à considérer sont

$$x^2 + 19y^2, \quad x^2 + 15y^2, \quad 3x^2 + 5y^2, \quad x^2 + 3y^2.$$

De la première, on conclut que

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 0;$$

des trois autres, que

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 1.$$

Donc $\varepsilon = 3$, partant $\varepsilon = F(19)$; c'est le résultat annoncé.

» Pour $k = 27$, quatre formes ambiguës à considérer; d'abord

$$x^2 + 27y^2, \quad 3x^2 + 9y^2,$$

d'où $n_1 = 1$, $n_2 = 1$; puis

$$x^2 + 23y^2, \quad x^2 + 11y^2,$$

d'où $p_1 = 2$, $p_2 = 0$. Donc $\varepsilon = 4$, partant $\varepsilon = F(27)$.

Pour $k = 35$, quatre formes ambiguës à considérer; d'abord

$$x^2 + 35y^2, \quad 5x^2 + 7y^2,$$

d'où $n_1 = 2$, $n_2 = 0$; puis

$$x^2 + 31y^2, \quad x^2 + 19y^2,$$

d'où $p_1 = 2$, $p_2 = 0$. Donc $\varepsilon = 6$, partant $\varepsilon = F(35)$.

» Enfin, pour $k = 43$, six formes ambiguës à considérer; d'abord

$$x^2 + 43y^2,$$

d'où $n_1 = 1$, $n_2 = 0$; puis

$$x^2 + 39y^2, \quad 3x^2 + 13y^2, \quad x^2 + 27y^2, \quad 3x^2 + 9y^2, \quad x^2 + 7y^2,$$

d'où $p_1 = 3$, $p_2 = 2$. Donc $\varepsilon = 3$, partant $\varepsilon = F(43)$. Vous voyez que cette fois encore la vérification cherchée a lieu. »

EXPÉRIENCES DIVERSES

SUR LES

ONDES EN MER ET DANS LES CANAUX, ETC.,

APPLICATIONS DIVERSES A L'ÉTUDE DES TRAVAUX MARITIMES, ETC.,

Par M. Anatole DE CALIGNY.

I.

Expériences relatives à la théorie de la houle en mer.

En 1858, j'ai communiqué à la Société Philomathique des expériences d'où il résulte que les déplacements à la surface et au fond de l'eau d'un canal (les observations étant faites avant et après le passage des ondes, dites courantes, produites par le mouvement alternatif vertical d'un corps de certaines dimensions) cessent, à une très-grande distance de l'origine, d'être assez sensibles pour qu'on soit sûr de leur réalité. En 1843, j'avais présenté un Mémoire, publié dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, où j'expliquais comment le mouvement de va-et-vient qui a engendré des ondes courantes, n'ayant pas toujours été rigoureusement vertical, il en était résulté des ondes secondaires de l'espèce dite *solitaires* ou *de translation*, qui se mêlaient aux premières, dont elles faisaient quelquefois courber les sommets en volute. Il en résultait qu'il tombait de l'eau dans les creux, et qu'une partie de la force vive était employée en percussions. On conçoit que ces déversements peuvent finir par *purger* en quelque sorte les ondes courantes de ces ondes secondaires, de sorte que le système peut, en définitive, n'avoir qu'un mouvement de translation réelle extrêmement faible.

Il s'agit maintenant de tirer parti de ces faits pour se former une idée de la houle en mer, quand il n'y a plus de vent depuis un certain

temps. Je ferai remarquer d'abord que dans les circonstances où j'ai pu faire des observations sur les vagues, tant en mer que sur des fleuves ou de grandes pièces d'eau, il n'y a jamais de progression à la surface sans un mouvement de recul alternatif très-prononcé, même contre la direction du vent, du moins quand les vagues observées sont assez loin du rivage. Cela se conçoit facilement, puisque les exhaussements occasionnés par le vent ne se font, en définitive, qu'au moyen de l'eau enlevée aux creux.

On admet généralement, je crois, d'après La Coudraye, que la force du vent est ordinairement peu de chose par rapport au poids des flots. Si l'on supposait que ceux-ci fussent encore d'une petite hauteur, telle, en un mot, qu'à l'époque considérée le transport horizontal réel qui peut être occasionné par le vent ne fût pas bien grand, et que ces flots ne pussent augmenter de hauteur qu'en vertu de la même force, la composante horizontale de cette dernière tendrait à engendrer des ondes dites *de translation*, c'est-à-dire probablement analogues à celles dont j'ai montré comment les ondes courantes d'un canal factice avaient pu être *purgées*, de manière à ne plus conserver de traces bien sensibles de transport réel.

Voici d'ailleurs un moyen très-simple d'étudier les effets du déversement dont il s'agit. Il suffit de prendre un soufflet de chambre ordinaire et de le faire agir alternativement en inclinant convenablement le tuyau de sortie de l'air sur le niveau de l'eau d'un réservoir. On voit ainsi creuser le niveau ; l'eau qui sort du creux s'accumule en avant, et la crête de l'onde se brise, la hauteur des ondes diminue très-rapidement en avant du tuyau dont le vent a engendré la première. De chaque côté de cette onde et en arrière, il se produit des courants faciles à observer au moyen des petits corps flottants qui se dirigent vers elle. Il n'est peut-être pas sans intérêt de remarquer que si l'on fait une expérience semblable dans une cuvette de grandeur convenable et de forme analogue à une calotte sphérique, on voit le mouvement d'ondulation s'accroître graduellement, de manière à donner quelque idée de l'accroissement graduel des vagues sous la force du vent qui les engendre. J'ai d'ailleurs souvent remarqué, comme bien d'autres l'ont fait sans doute, qu'un vent violent ne fait d'abord que rider la surface d'une pièce d'eau.

Mais si les effets précités du déversement sont faciles à concevoir, il n'en est plus ainsi des effets qui se présentent lorsque, sous l'action d'un vent assez prolongé, les ondes ne se brisent pas encore, quoiqu'elles soient entremêlées. Il semble rationnel de conclure de l'empiétement de ces ondes les unes sur les autres, que les creux, éléments de mouvement oscillatoire, étant plus ou moins occupés par suite de cet empiétement, cela peut servir à expliquer pourquoi les ondes n'augmentent pas plus de hauteur qu'elles ne le font sous l'action constante d'un vent parallèle à l'axe d'un canal tel que celui du parc de Versailles; d'autant plus que les effets de la réaction de l'extrémité du canal ne m'ont point paru dans ces circonstances se propager à une très-grande distance en amont pendant la durée du vent.

Après la cessation du vent, quand un canal est terminé par un plan vertical perpendiculaire à son axe, j'ai remarqué un effet intéressant qui distingue bien les effets de la réaction de ce plan de ceux de l'empiétement mutuel des ondes sous l'action d'un vent suffisamment prolongé. Une série d'ondes parallèles au plan vertical contre lequel se sont réfléchies les ondes revient en sens contraire de la direction qu'avait celui-ci; mais il est bien à remarquer que chaque onde s'étend comme une barre sur toute la largeur du canal, si cette surface de réflexion n'est pas courbe, quoique les ondes qui avaient été formées par le vent fussent entremêlées. Quand le plan vertical terminant le canal dans la direction du vent n'est pas perpendiculaire à l'axe de ce canal, la réflexion des ondes peut être observée à une assez grande distance, si l'angle de ce plan avec cet axe est suffisant. Lorsque ces ondes réfléchies arrivent dans une région abritée contre le vent par un promontoire, elles se propagent alors comme des barres régulières et parallèles dans cette région abritée.

Ce que j'ai dit sur les effets de l'empiétement des ondes soumises à l'action du vent m'a paru intéressant à signaler, mais ne peut être interprété qu'avec une extrême réserve, à cause de ce qu'on sait sur la manière dont certaines ondes élevées et déprimées peuvent se traverser sans se détruire, même quand elles marchent en sens contraire.

Quant au déversement du sommet des ondes, il me paraît utile de remarquer, abstraction faite même de ce que j'ai dit sur les effets des ondes secondaires de translation, comment le sommet des ondes donne

plus de prise au vent que le reste de leurs tranches. Il est clair qu'ils y donnent plus de prise que les creux. Mais, abstraction faite de ce qu'on voit au premier aperçu d'après l'abri mutuel que peuvent se prêter les vagues, on conçoit que la composante horizontale du vent agit pendant une durée d'autant plus longue sur les tranches d'une vague, que ces tranches sont plus élevées. Il est clair que la dernière qui sort à la base de la vague, ou la dernière, en un mot, qui se trouve découverte, ne peut recevoir l'action de cette composante que pendant un temps très-court à chaque période. On voit donc que le sommet des ondes formées par le vent renferme une cause essentielle de déversement, dont on conçoit, d'après ce qui a été dit plus haut, les effets sur la diminution du transport réel.

Cela s'accorde d'ailleurs avec ce que M. le commandant Cialdi (auteur d'un ouvrage sur les ondes dont la première édition a été présentée à l'Académie des Sciences en 1857, et dont la seconde édition, beaucoup plus étendue et contenant diverses notes dont je suis auteur, vient d'être présentée) a bien voulu me communiquer sur les effets des vagues en pleine mer. En effet, si j'ai bien compris ce que ce savant officier de marine m'a écrit en italien, il pense qu'en pleine mer l'onde proprement dite se brise rarement, que c'est seulement la partie supérieure, c'est-à-dire la crête, qui se brise souvent, ainsi que les petits flots qui recouvrent toute la superficie de l'onde. Quant à la masse en ondulation, elle ne se brise, selon lui, comme elle le fait au rivage, que dans des cas extraordinaires.

Ce que je viens de dire a seulement pour but une étude de transformations de mouvement. Quant à mes observations directes sur le mouvement de progression réelle à la surface des ondes réfléchies par un plan vertical après la cessation du vent, leur interprétation est assez délicate. On conçoit, en effet, que l'eau a dû s'accumuler dans la direction du vent, après la cessation duquel il y a nécessairement un mouvement réel de retour. Aussi je me propose de varier les études sur ce sujet pendant la durée du vent, au moyen de la simultanéité du mouvement des ondes dans sa direction, et des ondes réfléchies par un plan oblique à cette direction, sur lesquelles j'ai donné plus haut quelques indications. Abstraction faite d'ailleurs de la question du transport réel, il n'est peut-être pas sans intérêt de remarquer que le

courant apparent, pendant la durée d'un vent suffisamment prolongé, se comporte d'une manière analogue à un courant réel, quant au mode de divergence, lorsque le canal débouche dans une partie évasée, comme on peut l'observer au centre arrondi du canal du parc de Versailles quand la direction du vent est convenable.

II.

Expériences sur les vitesses des ondes de diverses espèces.

En 1858, j'eus occasion de faire des observations sur un canal factice en planches qui n'avait pas été construit dans ce but, n'ayant pour objet que d'abreuver la cavalerie de Versailles pendant une longue sécheresse; on puisait de l'eau dans la pièce d'eau des Suisses. Je fis mes observations sur un côté de ce canal qui avait 77 mètres de long. Je ne m'occuperai point ici de l'autre partie de ce canal, d'une longueur un peu moindre que celle-ci; je dirai seulement que ces deux parties se réunissaient en un point plus élevé que tout le reste du fond, et sur lequel l'eau était versée par une pompe. Je ne faisais mes observations qu'en temps calme, et lorsqu'il n'y avait plus d'autres mouvements dans le liquide que ceux que j'y produisais à l'extrémité la plus profonde de la partie du canal sur laquelle j'opérais au moyen d'une pierre de forme régulière, ayant $0^m,20$ de long, $0^m,20$ de haut et $0^m,10$ de large.

La section perpendiculaire à l'axe de ce canal était un trapèze qui n'était pas tout à fait constant; voici quelques-unes de ses largeurs au sommet : $0^m,46$; $0^m,425$; $0^m,435$; $0^m,43$; $0^m,425$; $0^m,435$; $0^m,435$; $0^m,445$; $0^m,45$; la largeur du fond variait de $0^m,23$ à $0^m,25$, et ce fond portait de chaque côté une baguette d'environ $0^m,02$ de haut, autant de large, échancrée latéralement sur l'angle saillant, de manière à offrir $0^m,01$ environ de largeur sur l'échancrure.

Ces détails, quoique sans importance, donnent une idée du degré d'irrégularité de ce canal. J'ajouterai que de quatre mètres en quatre mètres il y avait sur le fond, posée à plat, une petite planche occupant en ces points toute la largeur de ce fond et ayant $0^m,01$ de haut sur $0^m,05$ de large, c'est-à-dire dans le sens de l'axe du canal.

La hauteur du canal prise en divers points était de $0^m,26$ à $0^m,265$.

nous l'avons dit, de remplacer u_1 et u'_1 par $U_1 i$ et $U'_1 i$. Des relations (12) on déduit

$$\frac{U_1}{v} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2 \sin^2\alpha}}, \quad \frac{U'_1}{v} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2_1 \sin^2\alpha}}.$$

Les formules (17) ne changent pas. Si, pour abréger, on pose

$$(21) \qquad \varepsilon = \frac{\frac{U_1}{v} - \frac{U'_1}{v}}{1 - \frac{U_1 U'_1}{v^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2 \sin^2\alpha}} - \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2_1 \sin^2\alpha}}}{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2 \sin^2\alpha}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2_1 \sin^2\alpha}\right)}},$$

les équations (16) deviennent

$$(22) \quad \begin{cases} B_1 = -B \dfrac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} \times \dfrac{\cos(\alpha + \alpha') + i\varepsilon \sin(\alpha + \alpha')}{\cos(\alpha - \alpha') - i\varepsilon \sin(\alpha - \alpha')}, \\[2ex] B' = B \dfrac{2 \sin\alpha' \cos\alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')} \times \dfrac{1}{\cos(\alpha - \alpha') - i\varepsilon \sin(\alpha - \alpha')}, \\[2ex] b = B \dfrac{1 - \dfrac{U'^2_1}{v^2}}{\left(\dfrac{U_1}{v} + \dfrac{U'_1}{v}\right)\left(1 - \dfrac{U_1}{v}\dfrac{U'_1}{v}\right)} \times \dfrac{2i \sin(\alpha - \alpha')}{\cos(\alpha - \alpha') - i\varepsilon \sin(\alpha - \alpha')}, \\[2ex] b' = B \dfrac{1 - \dfrac{U^2_1}{v^2}}{\left(\dfrac{U_1}{v} + \dfrac{U'_1}{v}\right)\left(1 - \dfrac{U_1}{v}\dfrac{U'_1}{v}\right)} \times \dfrac{2i \sin(\alpha - \alpha')}{\cos(\alpha - \alpha') - i\varepsilon \sin(\alpha - \alpha')}. \end{cases}$$

On en déduit, pour la vibration transversale réfléchie et la vibration transversale réfractée,

$$(23) \quad \begin{cases} D_1 = -D \dfrac{\operatorname{tang}(\alpha - \alpha')}{\operatorname{tang}(\alpha + \alpha')} \times \dfrac{1 + i\varepsilon \operatorname{tang}(\alpha + \alpha')}{1 - i\varepsilon \operatorname{tang}(\alpha - \alpha')}, \\[2ex] D' = D \dfrac{2 \sin\alpha' \cos\alpha}{\sin(\alpha + \alpha')\cos(\alpha - \alpha')} \times \dfrac{1}{1 - i\varepsilon \operatorname{tang}(\alpha - \alpha')}. \end{cases}$$

16. Ces formules se réduiraient aux formules de Fresnel, si la quantité ε était nulle. Mais si cette quantité n'est pas nulle, les deux rayons transversaux, l'un réfléchi, l'autre réfracté, qui proviennent d'un même rayon incident polarisé en ligne droite dans un azimut quelconque,

seront polarisés elliptiquement à cause de la différence de phase de leurs composantes. Soit $E \cos(ux + vy - st)$ la vibration incidente faisant avec oz l'angle θ compté de oz vers $o\varphi$; on a

$$C = E\cos\theta, \quad D = E\sin\theta.$$

Si l'on pose

(24) $$\operatorname{tang}\delta' = \varepsilon \operatorname{tang}(\alpha + \alpha'), \quad \operatorname{tang}\delta'' = \varepsilon \operatorname{tang}(\alpha - \alpha'),$$

les formules (23) deviennent

(25) $$\left\{\begin{aligned} D_1 &= -D\frac{\sin\delta''}{\sin\delta'}e^{(\delta'+\delta'')i}, \\ D' &= D\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\delta''}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha')}e^{\delta'' i}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait $\delta = \delta' + \delta''$, la vibration transversale réfléchie a pour composantes les parties réelles des formules

$$\zeta = -E\cos\theta\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}e^{(-ux+vy-st)i},$$

$$\varphi_1 = -E\sin\theta\frac{\sin\delta''}{\sin\delta'}e^{(-ux+vy-st+\delta)i},$$

c'est-à-dire

(26) $$\left\{\begin{aligned} \zeta &= -E\cos\theta\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}\cos(-ux+vy-st), \\ \varphi_1 &= -E\sin\theta\frac{\sin\delta''}{\sin\delta'}\cos(-ux+vy-st+\delta). \end{aligned}\right.$$

De même la vibration transversale réfractée a pour composantes

(27) $$\left\{\begin{aligned} \zeta &= E\cos\theta\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}\cos(u'x+vy-st), \\ \varphi' &= E\sin\theta\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\delta''}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha')}\cos(u'x+vy-st+\delta''). \end{aligned}\right.$$

La différence de phase est $\delta = \delta' + \delta''$ pour le rayon réfléchi, δ'' pour le rayon réfracté.

chiffres ci-dessus transcrits, selon une loi qui ne paraît pas différer beaucoup d'une progression géométrique décroissante. Ils diminuent ensuite moins rapidement; mais étant déjà beaucoup moindres, ils deviennent plus difficiles à observer rigoureusement. On conçoit d'ailleurs, surtout dans les parties qui se relèvent, que les petites planches transversales de 1 centimètre d'épaisseur peuvent avoir une influence quelconque sur les phénomènes de progression à la surface ou de recul au fond de l'eau. Je ne saurais trop répéter que ce canal factice n'avait pas été disposé dans le but de faire des expériences, ce qui n'empêche point de pouvoir tirer des conséquences bien positives des principaux résultats obtenus.

Ces effets de progression à la surface et de recul au fond de l'eau se présentant avec d'autant plus d'intensité qu'ils sont observés plus près de l'origine du mouvement alternatif qui a engendré les ondes, ne pourraient-ils pas servir à expliquer pourquoi dans les expériences des frères Weber, dont le canal était très-court, le grand axe des *orbites* des ondes courantes était horizontal au lieu d'être vertical, comme dans les expériences que j'ai communiquées à la Société Philomathique en 1842, et comme dans les observations faites en mer par feu M. Aimé, qui ne les avait d'ailleurs présentées qu'avec réserve à une époque où les miennes ne les avaient pas confirmées, quant aux effets de l'eau dans un canal factice?

Je n'aurais peut-être pas étudié avec autant de soin les phénomènes de progression et de recul dans le canal dont je viens de parler sans les observations qui ont été faites à l'occasion de mes Mémoires sur les ondes par M. le commandant Cialdi, dans la première édition de son ouvrage sur le mouvement ondulatoire de la mer, etc.

Dans la seconde édition de cet ouvrage, p. 594 à 597, M. Cialdi explique qu'il ne nie pas l'existence d'un mouvement de transport très-faible dans la houle en pleine mer après la cessation du vent. Je ne prétends pas autre chose, en admettant comme conséquence théorique, et sans pouvoir préciser aucun chiffre à ce sujet, qu'il y a un mouvement *quelconque* de progression réelle sans lequel je ne m'expliquerais pas complétement ce phénomène, mais sans affirmer par moi-même que les marins doivent en tenir compte et ne pouvant que m'en rapporter à ce qui a été écrit sur cette matière par M. de Tessan dans la

seconde édition du même ouvrage où M. Cialdi fait à ce sujet des observations qu'il ne m'a pas encore été possible de discuter assez complétement.

Voici du moins un point de vue pratique relatif à la première édition de cet ouvrage de M. Cialdi où il admettait que si le transport réel dans les ondes courantes était très-peu important quand le vent n'était pas assez fort, il n'en était pas ainsi, à beaucoup près, quand la force du vent dépassait certaines limites. M. Cialdi convenait qu'alors une cause capable d'engendrer des ondes agissant encore, occasionnait des phénomènes de transport réel dont il donnait dès lors divers exemples. Ces derniers ne sont pas en désaccord avec ce que j'ai trouvé sur le mode d'influence des causes qui engendrent les ondes courantes, quand celles-ci ne sont pas encore trop éloignées de leur origine, ce qui s'applique sans doute à la cause qui continue à agir sur elles, tant qu'on ne peut pas les considérer comme étant, à proprement parler, abandonnées à elles-mêmes. Seulement il ne paraît pas que M. Cialdi eût alors réuni des observations relatives au mode de recul dont j'ai parlé ci-dessus, mais dont on ne comprenait pas encore bien les conséquences, sans doute parce que je n'avais pas suffisamment expliqué qu'il s'agissait d'un phénomène de la *formation des ondes courantes*.

La disposition du canal factice en bois dont je me suis servi pour les expériences dont je viens de parler m'a permis, comme je l'ai expliqué ci-dessus, de produire un nombre d'ondes courantes beaucoup plus considérable que ne semblait l'indiquer, au premier aperçu, la longueur de ce canal; car il est bien à remarquer que si le fond avait été horizontal partout, et si les deux extrémités avaient été des plans verticaux, les ondes se réfléchissant successivement à chaque extrémité et réagissant les unes sur les autres, au lieu de venir sur une plage inclinée, auraient bientôt produit le phénomène de *clapotage* dont j'ai rendu compte à la Société Philomathique depuis 1842, et dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, année 1848, t. XIII, 1re série.

Il résultait d'ailleurs de la disposition du premier canal factice dont je m'étais alors servi, un moyen très-simple d'étudier les vitesses d'une onde solitaire dans diverses circonstances, parce que je faisais promener cette onde de l'extrémité à l'autre du canal, où des plans verticaux

la réfléchissaient alternativement. J'avais donc un moyen de multiplier la longueur du canal, ce qui me permit de vérifier pour ces ondes solitaires les lois des vitesses qui avaient été trouvées sur des canaux de beaucoup plus grandes dimensions.

Je crois être le premier qui ait publié ce moyen de multiplier ainsi un espace limité dans lequel on peut observer directement la vitesse des ondes. C'est seulement en 1844 que M. Russell a publié dans l'*Association Britannique* un Mémoire où il emploie ce moyen de mesurer la vitesse d'une onde solitaire en multipliant ainsi le chemin parcouru, malgré les limites restreintes de la longueur d'un canal fermé à ses extrémités. Si j'apprenais qu'on eût publié cette idée avant moi, je m'empresserais de le reconnaître; mais elle a acquis désormais une véritable importance historique à cause des applications si connues d'une idée semblable à la mesure de la vitesse de la lumière. Déjà, dans une Note du 23 juillet 1842, publiée par le journal *l'Institut*, j'avais dit quelques mots sur la vitesse de l'onde solitaire se promenant d'un extrémité à l'autre d'un canal terminé par des plans verticaux. Je reproduirai d'ailleurs plus loin, comme pièce historique, une Note du 25 mars 1843 qui renferme des détails, complément utile de ce Mémoire et de celui de 1848, qui a été publié dans ce journal.

Un bateau de 6 mètres de long et dont la plus grande largeur était de $1^{m},50$ ayant été disposé perpendiculairement à l'axe d'un canal dont la largeur au fond était de $9^{m},80$, la largeur à la ligne d'eau de $12^{m},20$, la profondeur de l'eau étant de 1 mètre, sauf quelques légères déformations, je donnais un mouvement régulier d'oscillation à ce bateau en m'appuyant alternativement de chaque côté afin de produire des ondes. Le canal avait une longueur de $81^{m},60$ jusqu'à un pont qui bornait la vue à l'autre extrémité.

Il n'est pas nécessaire, pour produire des ondes *courantes* s'étendant, comme une barre sensiblement rectiligne, d'une rive à l'autre de ce canal et perpendiculairement à son axe, que la longueur du bateau soit elle-même perpendiculaire à cet axe. Il est même quelquefois plus commode d'attacher le bateau par une chaîne à une extrémité du canal, sa longueur étant sur l'axe de ce dernier, parce qu'après avoir produit les ondes en s'appuyant alternativement de chaque côté du bateau, il

était plus facile de se précipiter sur le rivage pour suivre à la course les ondes qu'il s'agissait d'étudier.

Je faisais surtout mes observations sur la moitié de la longueur de la partie du canal où la vue était arrêtée par un pont, c'est-à-dire sur $40^m,80$ à partir de ce pont, et je comptais les intumescences sur cette dernière longueur. Après bien des tentatives pour lesquelles j'ai fini par me faire aider, on en a trouvé dix-sept en nombre rond sur la partie dont il s'agit; de sorte que chacune des ondes avait une longueur d'environ deux fois et demie la profondeur de l'eau. Leur vitesse paraissait sensiblement uniforme; elle était beaucoup plus grande que celle des ondes qui les suivaient un certain temps après que les balancements du bateau étaient arrêtés. Ces dernières ondes, beaucoup plus petites, peuvent être suivies au pas ordinaire, la vitesse des premières étant à peu près double.

Ce que je viens de dire a seulement pour but de fixer les idées sur ce que le rapport de la longueur des grandes ondes à la profondeur du canal était bien moindre que dans le canal factice en planches, dont la section était un trapèze un peu variable sur les détails duquel il est inutile de s'étendre ici pour l'objet de cette Note, ce que j'en ai dit ci-dessus étant suffisant. Je remarquerai que la longueur de chacune des ondes courantes étant assez sensiblement de $0^m,50$, du moins vers l'origine de la première partie du canal, je veux dire de celle qui avait 42 mètres de long, et où la profondeur d'eau variait de $0^m,11$ à $0^m,12$, sauf les petites irrégularités que j'ai signalées ci-dessus.

Or, dans le grand canal, la longueur de chaque onde courante était d'environ deux fois et demie seulement la profondeur de l'eau qui y était de 1 mètre. Il y a donc lieu de croire que le mouvement se propageait relativement d'une manière moins sensible jusqu'au fond de l'eau dans le grand canal que dans le petit, où j'avais pu observer pour la hauteur d'eau précitée et pour une hauteur d'eau à peu près double, que les ondes courantes avaient sensiblement la même vitesse qu'une onde solitaire de même hauteur, bien entendu pour chaque profondeur d'eau.

J'étais parvenu, à force de patience, à donner sensiblement la même hauteur aux ondes courantes qu'à une onde solitaire que je produisais après leur passage. Or, j'avais disposé à des distances sensiblement égales,

de quatre mètres en quatre mètres, un nombre de points de repères suffisant pour remarquer d'une manière bien positive que l'onde solitaire restait sensiblement à une même distance des ondes courantes qui avaient été produites par un mouvement de va-et-vient vertical.

Il était essentiel de faire cette observation et de la répéter avec patience, en notant simultanément les points de repère où arrivaient en même temps l'onde solitaire et les ondes courantes. En effet, quand on s'empresse de produire une onde solitaire trop près des ondes courantes, sans y mettre assez de patience, l'onde solitaire pouvant être plus forte qu'on ne le veut et sa vitesse dépendant, comme on sait, de sa hauteur, on peut être porté à croire, si elle atteint les ondes courantes, qu'elle va plus vite que ces dernières dans des circonstances où il n'en est plus ainsi à hauteur égale.

Dans le grand canal, je n'ai eu jusqu'à présent à ma disposition aucun moyen de produire une onde *solitaire* de hauteur comparable à celle des grandes ondes courantes dont j'ai parlé. Je n'ai donc pu que calculer la vitesse qu'aurait eue cette onde solitaire, si j'avais pu la produire, afin de la comparer à celle des ondes courantes.

Il est moins facile qu'on ne le croit, surtout pour un seul observateur, de mesurer cette dernière vitesse. On sait d'ailleurs combien il est difficile de ne pas confondre, dans une série d'ondes courantes, une onde avec celle qui la précède ou qui la suit. J'ai d'abord essayé, en me tenant à une extrémité du canal, après avoir imprimé des mouvements de balancement au bateau, d'observer à une grande distance, en temps calme, l'instant où les images des objets environnants indiquaient l'arrivée de l'ondulation. Il en résulta d'abord que je ne crus devoir noter aucune différence assez sensible entre la vitesse des ondes courantes et celle d'une onde solitaire qui aurait eu la même hauteur. Mais il y a dans ce mode d'observation une chance d'erreur provenant notamment de ce qu'il est difficile de ne pas imprimer involontairement au bateau quelques mouvements préliminaires; de sorte que la vitesse des ondes peut sembler plus grande qu'elle ne l'est réellement.

Le moyen de mesurer cette vitesse, qui m'a semblé provisoirement le plus pratique, est de les suivre à la course. On conçoit que cela exige un certain apprentissage, même pour des vitesses aussi modérées; il faut, autant que possible, une suite de sauts cadencés que l'on parvient,

à force de patience, à coordonner au mouvement des images des corps environnants.

J'ai au moins pu constater que ces ondes courantes allaient bien moins vite qu'une onde solitaire qui aurait eu la même hauteur. Mais leur longueur était bien moindre que celle qu'aurait eue sans doute cette onde solitaire, d'après ce que j'avais observé sur des canaux factices. Il est probable que la longueur trouvée pour l'onde courante était bien la véritable; car la somme des longueurs d'une onde déprimée et d'une onde élevée différait assez peu du double de la plus grande largeur du bateau dont les balancements les ont engendrées. Il est rationnel de penser que le mouvement s'étend à une profondeur moindre que pour l'onde solitaire; ces observations viennent d'ailleurs à l'appui des prévisions d'après lesquelles les géomètres ont annoncé que la vitesse des ondes est fonction de la profondeur à laquelle leur mouvement peut atteindre.

Le long du grand canal s'élève, parallèlement à son axe, un mur vertical, garni d'un treillage régulier formé de lattes en bois composant des carrés dont les côtés sont tous horizontaux ou verticaux. Quand les ondes, observées à une certaine distance de l'origine, passent devant un point donné, les lattes verticales, si l'on regarde leurs images dans l'eau, semblent agitées comme une corde en ondulation. Lorsqu'on regarde du côté de la direction apparente des vagues, il semble que l'ondulation de cette corde s'élève du fond de l'eau. Quand on regarde de l'autre, elle paraît, au contraire, descendre. Enfin, si l'on regarde perpendiculairement à l'axe du canal, ces ondulations apparentes ne montent ni ne descendent; le mouvement apparent de corde ondulée des lattes horizontales dans l'eau est bien dans le même sens que le mouvement apparent des ondes courantes. Cela est très-commode pour observer rigoureusement le changement de sens de celles-ci, car on voit changer en même temps le sens du mouvement apparent de ces espèces de cordes ondulées. Quant au sommet du mur de hauteur constante dont l'image est bien tranchée sur l'eau tranquille, il est très-commode de s'en servir pour contrôler les observations sur les ondes courantes qui, lorsqu'elles sont assez fortes, donnent aux limites de cette image des formes comparables à celles d'une espèce de scie à dents courbes; c'est en suivant de l'œil ces formes très-faciles à observer,

qu'on parvient avec moins de difficulté à suivre ces ondes à la course.

Je dois faire observer que, plus mes expériences se multiplient, plus je pense qu'il faut avoir de réserve en généralisant les comparaisons des vitesses d'une onde *solitaire* à celles des ondes courantes dans un même canal; cela dépend évidemment, jusqu'à un certain point, de la manière dont elles ont été engendrées.

Ainsi, comme je l'ai déjà remarqué, les ondes du canal factice en bois où l'eau n'avait que de petites profondeurs, et où les mouvements qui engendraient les ondes s'étendaient alternativement, sinon sur toute la hauteur de l'eau, du moins sur une partie considérable de cette hauteur, étaient relativement plus longues par rapport à la profondeur de l'eau que celles du grand canal. Elles étaient même relativement plus longues, je veux dire par rapport à la profondeur de l'eau dans le dernier canal factice en bois, que dans le premier canal factice en bois doublé de zinc dont je me suis servi notamment en 1842 et 1843, chez M. Bourdon, sur la demande de M. le général Poncelet. Je l'attribue à ce que, non-seulement le mouvement alternatif qui engendrait les ondes courantes ne pénétrait pas relativement si près du fond, mais à ce que la section du corps qui engendrait les ondes occupait une moindre fraction de la largeur du canal.

Dans ces premières observations, j'avais cru remarquer qu'à hauteur égale l'onde solitaire allait plus vite que les ondes courantes, celles-ci étant atteintes par l'onde solitaire que je lançais après elles. J'ai conçu depuis quelques doutes sur l'exactitude de ce résultat, d'après ce que j'ai dit plus haut sur la comparaison entre les vitesses de l'onde solitaire et des ondes courantes dans le canal factice en bois.

On conçoit, en effet, la possibilité d'une erreur dans la hauteur d'une onde solitaire ainsi lancée, quand le canal n'est pas assez long pour qu'on puisse suivre longtemps de l'œil les deux espèces d'ondes pendant une marche simultanée. Mais je suis porté à croire aujourd'hui que cela dépendait, comme je l'ai dit ci-dessus, de quelques différences dans la manière dont les ondes courantes avaient été engendrées.

Je me suis d'ailleurs souvenu que les ondes dites de translation, que l'on engendre quelquefois malgré soi, en cherchant à produire seulement des ondes courantes, allaient en général plus vite que celles-ci;

car lorsqu'on les apercevait, elles arrivaient les premières à un ressaut plongé dont je me suis servi dans quelques circonstances. Je parlerai plus loin de ce ressaut, en expliquant pourquoi je l'ai quelquefois posé entre le fond et la surface de l'eau.

III.

Observations sur les courbes suivies par les molécules de l'eau dans des ondes de diverses espèces.

Il n'est pas exact, quand il s'agit des vagues de la mer, du moins pendant la durée du vent sur les côtes, de dire que les courbes suivies par les molécules à la surface soient assez sensiblement fermées comme dans un canal où les ondes courantes ne sont occasionnées que par un mouvement de va-et-vient vertical et régulier. J'ai profité des occasions qui se sont présentées pour étudier de nouveau la question sur les rivages des côtes de Normandie. Déjà en 1851, dans une traversée en bateau à vapeur de Caen au Havre, je n'étais pas précisément en pleine mer, puisqu'on ne perdit pas de vue les côtes; mais, à cette distance, la marche du bateau étant perpendiculaire à la direction apparente des flots, les observations offraient à certains égards plus d'intérêt qu'au rivage même. Or, je remarquai bien distinctement, comme je l'avais déjà fait en 1848 à 2 kilomètres environ en aval de Mantes, sur une partie de la Seine très-bien disposée pour faire ces observations, que le mouvement de l'écume était bien un mouvement de va-et-vient à la surface des flots, ce qui semblait favorable à l'hypothèse du mouvement dit *orbitaire* dans les régions supérieures.

En 1861, j'ai fait sur ce sujet des observations beaucoup plus nombreuses à Fécamp. Lorsque, d'une certaine hauteur, j'examinais dans le lointain le mouvement général de la mer, l'écume des flots disparaissait après avoir parcouru un trajet qui, évidemment, dépendait de la force du vent. Ce phénomène est très-utile, comme on va voir, pour ce genre d'observations. Quelque fort que soit le vent, lorsque la distance n'est pas assez grande pour empêcher de bien distinguer ce qui se passe dans le champ d'une lunette, on voit l'écume, à l'époque où elle disparaît à l'œil nu, recouvrir la surface des flots, en cessant de

donner prise au vent plus que l'eau elle-même, dont elle offre l'avantage de changer la couleur.

Il est alors très-facile de voir le mouvement de va-et-vient qui se fait à la surface de l'eau, malgré le vent et malgré le mouvement de progression quelconque, pouvant provenir notamment d'une espèce de coup de bélier des flots contre le plan incliné du rivage, phénomène sur lequel je reviendrai plus loin. Il résulte de ces observations, d'ailleurs faciles à varier, que, du moins à l'approche des rivages, il est absolument impossible d'admettre exclusivement l'ancienne théorie dite du siphonnement des flots. Elle est incompatible avec le mouvement de recul de l'écume à la surface de l'eau, même quand cette écume fait ainsi partie intégrante de cette surface. Je dois dire que, dans mes nombreuses observations à Fécamp, ce mouvement de recul n'a jamais été aussi fort à beaucoup près que le mouvement de progression vers le rivage. De sorte qu'à la surface de l'eau les trajectoires, au lieu d'être des courbes fermées, ont bien plutôt de l'analogie avec l'axe d'une corde formant ce que Hachette désigne, dans son *Traité des machines*, sous le nom de *nœud de l'artificier*. C'est, au reste, en pleine mer, et surtout aux époques où, sans qu'il y ait un vent bien sensible (ce que je n'ai eu occasion d'observer qu'une seule fois du rivage), la mer est agitée seulement par suite de la propagation de mouvements très-lointains, que la question doit être approfondie. Je crois intéressant de signaler ce sujet d'observations dans les voyages de long cours.

Il paraît résulter d'expériences de M. Russell que, dans certaines circonstances, le mouvement orbitaire existe jusqu'aux limites inférieures du mouvement de l'eau. On ne doit donc accueillir qu'avec réserve, pour la pleine mer, les observations qui se réunissent aux anciennes pour établir un mouvement de va-et-vient sur le fond des rades ou, en général, des nappes d'eau qui ne sont pas trop profondes, quoiqu'un mouvement orbitaire puisse exister dans les régions supérieures, comme je l'ai observé dans un canal factice en 1842, et qu'il puisse exister aussi dans les régions supérieures des mouvements analogues à ceux que j'ai observés à Fécamp.

Quant aux ondes solitaires, je crois intéressant d'ajouter à ce que j'ai dit dans mon Mémoire de 1848 quelques détails sur une de mes

communications, extraits du procès-verbal de la séance de la Société Philomathique de Paris du 10 décembre 1842 :

« ... Il n'est pas exact de dire, comme on le trouve dans les auteurs qui ont traité de cette matière, que l'onde dite *solitaire* ait rigoureusement, dans tous les cas, un mouvement de transport continu sans oscillation rétrograde, bien que cela soit généralement exact. Le phénomène de *contre-courant inférieur*, objet de cette Note, paraît dépendre de plusieurs causes, et notamment du rapport de l'élévation de l'eau dans le canal. Ainsi, quand cette profondeur était d'environ $0^{m},15$, et que l'onde, abandonnée à elle-même, s'était abaissée après avoir plusieurs fois parcouru la longueur du canal, on observait très distinctement un mouvement rétrograde, beaucoup plus faible, il est vrai, que le mouvement de progression, mais qui *marquait des périodes* le long du chemin parcouru d'une extrémité à l'autre de ce canal. Ce fait, qui n'avait point été remarqué, jette beaucoup de jour sur la constitution de l'onde *solitaire*, et explique, entre autres choses, la *perméabilité apparente* des ondes de cette espèce, qui sans cela eût été assez difficile à concevoir, comme on le disait dans la dernière communication sur ce sujet. Mais si l'inertie de l'eau suffit pour donner lieu à un contre-courant dans certaines ondes *solitaires*, il en sera ainsi, à plus forte raison, lorsque ces ondes rencontreront des ondes de la même espèce, animées de vitesses directement opposées. Ces ondes ne se traverseront donc pas comme elles semblent le faire, mais la plus puissante se divisera en deux parties, dont une, retournant sur ses pas, produit un effet analogue à celui de l'onde la plus faible qui aurait traversé la première. Le mouvement rétrograde, périodiquement observé dans ce système d'ondes solitaires, est une des raisons pour lesquelles ces ondes ne marchent pas, pour de très-petites hauteurs d'eau dans ce canal, avec la vitesse indiquée par la loi empirique trouvée en Angleterre pour de plus grandes hauteurs.... »

L'année qui a suivi celle de la publication de cette Note, M. Dyar a publié dans les *Annales de Chimie et de Physique*, numéro d'avril 1843, un Mémoire où il parle de faits de ce genre dans la rencontre d'ondes opposées, et il donne quelques détails intéressants. Il dit avec raison qu'on voit le mouvement *s'étendre* à la rencontre de deux ondes élevées dont les directions sont contraires. Cela ne contredit pas ce que

j'avais dit dans ma communication du 12 novembre 1842, où j'annonçais qu'on voit un instant de repos sur la crête commune quand les deux ondes qui se rencontrent ainsi sont égales. On conçoit, d'après ce que je viens de transcrire, que ces deux ondes égales s'arrêtent un instant en s'élevant l'une contre l'autre, et qu'en disant que le mouvement *s'étend* à l'intérieur, on veut dire que les choses se passent d'une manière analogue à ce qui se présente dans l'écrasement mutuel de deux corps mous venant à la rencontre l'un de l'autre. Ces divers effets sont très-faciles à apercevoir au moyen de poussière répandue dans l'eau.

M. Dyar parle de la réflexion des ondes à l'extrémité de son canal; mais il n'a pas dit que cette réflexion pouvait servir à mesurer la vitesse d'une onde solitaire, en faisant promener cette onde d'une extrémité à l'autre. Il a été conduit, § VI de son Mémoire, à une conclusion qui ne peut être vraie que dans des cas particuliers résultant des dimensions relatives du corps qui engendrait les ondes, et peut-être aussi de l'étendue du mouvement imprimé à ce corps. L'agitation s'est produite à de beaucoup plus grandes profondeurs relativement à la hauteur des ondes, notamment dans mes expériences sur le canal factice en bois.

Je dois aussi faire quelques observations sur ces mots qui sont à la fin de son Mémoire : « Dans aucun cas une onde ne peut en altérer une autre d'une manière permanente. » Ce qui peut être vrai pour la rencontre de deux ondes seulement est formellement contraire au fait suivant que j'ai signalé à la Société Philomathique de Paris, le 23 juillet 1842, et qui se rapportait au cas où une onde solitaire passait par-dessus une série d'ondes alternativement élevées et déprimées, que l'on appelle *ondes courantes*. On lit dans le journal *l'Institut*, dans l'extrait du procès-verbal de cette séance n'ayant pour objet que ma communication, p. 281 : « Quand on soulève une grande onde solitaire, elle se précipite après l'onde courante, passe dessus en brisant les crêtes de celle-ci, remplit en partie les creux, et, si elle est assez puissante par rapport à elle, elle lui survit après l'avoir presque détruite. Or, quand on donne un mouvement alternatif au cylindre qui fait soulever les ondes, ce mouvement n'étant pas toujours vertical, il en résulte nécessairement des mouvements analogues à ceux dont on

vient de parler, avec cette différence que les intumescences auxquelles ils donnent lieu se perdent en partie dans les creux des ondes courantes qui subsistent, si elles sont assez puissantes par rapport à ces ondes dites *solitaires* qui peuvent être cependant en assez grand nombre, et servent à expliquer, jusqu'à un certain point, les mouvements continus qui s'observent quelquefois, même dans un *sens contraire* au mouvement apparent de l'onde courante. Or, il est évident que la pression des vents qui soulèvent les ondes en pleine mer, agissant sous certains rapports comme le poids d'une masse d'eau ajoutée à celle de la mer, donne lieu à des ondes *solitaires* qui changent tout le système des ondes courantes; il y a donc, outre le transport horizontal, causé directement par ces vents, une cause de mouvement qui dénature les ondes courantes, et dont il était indispensable de bien se rendre compte pour s'expliquer divers effets qui pourraient induire en erreur dans l'étude des mouvements intérieurs ou à la surface de l'eau, dans le canal dont il s'agit principalement dans cette Note.... »

J'ai cru devoir transcrire le passage précédent avec les défauts de rédaction qui peuvent s'y trouver, parce qu'il a été imprimé l'année qui a précédé celle de la publication du Mémoire précité de M. Dyar. Cela n'empêche pas que les observations de ce dernier sont très-précieuses, et, à certains égards, précisent mieux que je ne l'avais fait de quelle manière le transport réel des ondes élevées peut être compensé par le transport réel en sens contraire des ondes déprimées. Je crois d'ailleurs devoir encore transcrire le passage suivant de la même note du journal *l'Institut*, p. 280, sur mes observations relatives à une série d'ondes alternativement élevées et déprimées, produites par un mouvement de va-et-vient vertical : « .... En répandant des corps légers dans l'eau en ondulation, il est très-facile, quand cette eau est suffisamment claire, de suivre de l'œil les chemins parcourus par ces poussières ou corps légers tenus en suspension. Au fond de l'eau, il n'y a qu'un mouvement de va-et-vient, un véritable *siphonnement*. Dans les régions supérieures du liquide, il y a un *ondoiement* général dont on ne peut observer la loi qu'après des observations réitérées; mais on s'en rend facilement compte en remarquant qu'il y a un mouvement de va-et-vient vertical et un mouvement de va-et-vient horizontal, sans que la direction du mouvement soit jamais ni verticale ni horizontale

le long d'un chemin notable. Chaque molécule est soulevée et poussée en avant, puis elle redescend et recule vers sa première position ; de sorte que dans les parties supérieures du liquide chaque molécule décrit une courbe fermée, ayant de l'analogie en apparence avec une ellipse. Mais ce résultat suppose que l'on observe l'onde *courante*. Quand l'onde se balance à l'une ou l'autre extrémité du canal, après quelques balancements, le mouvement devient véritablement *vertical* jusqu'à une certaine profondeur à laquelle il courbe inférieurement sa direction, qui devient horizontale dans le creux de la vague; de sorte que le mouvement est alors un véritable siphonnement jusqu'à l'époque où, revenant sur ses pas, elle redevient onde *courante*. C'est aussi ce qui doit se présenter jusqu'à un certain point, quand on lance de chaque extrémité du canal deux systèmes d'ondes qui viennent se rencontrer et forment ce que l'on appelle en mer onde *clapoteuse*. Mais le mouvement étant alors très-compliqué, on n'a encore bien observé que le balancement horizontal dans les creux. L'intumescence du flot a elle-même alors un mouvement de va-et-vient horizontal, sans mouvement de translation continu.... »

On conçoit, d'après les passages de ma Note du 23 juillet 1842 que je viens de rappeler, comment une série d'ondes alternativement élevées et déprimées est modifiée par le seul fait de la réunion de ces ondes, d'où résulte même à la surface de l'eau un mouvement de va-et-vient qui semble changer la nature du phénomène. Les ondes élevées, si elles étaient seules, iraient d'ailleurs, dans certains cas observés, quand les profondeurs de l'eau ne sont pas très-grandes, d'autant plus vite, comme on sait, qu'elles seraient plus élevées, et les ondes déprimées de même volume iraient sans doute plus lentement dans le même canal. La réunion théorique de ces deux espèces d'ondes qui, marchant ensemble, forment ce qu'on appelle des ondes *courantes*, est assez délicate à interpréter, à cause de la raison qui vient d'être indiquée ; mais ce que j'en ai dit montre une fois de plus qu'il ne peut pas être vrai que dans aucun cas une onde ne peut en altérer une autre d'une manière permanente.

Il est bien intéressant de remarquer, relativement aux expériences de M. Dyar, qu'elles ont été faites dans des cas particuliers où l'agitation ne se propageait pas jusqu'au fond du canal, ce qui rend les

faits observés par lui plus analogues aux faits observés en mer. Il en résulte d'ailleurs qu'il ne serait pas vrai de dire que l'onde solitaire ne pourrait pas se propager pour de très-grandes profondeurs d'eau; mais ceci donne lieu de faire une remarque essentielle.

Dans un Rapport lu à l'Institut le 10 août 1863 par M. Clapeyron, on lit, p. 303 du tome LVII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, relativement à l'onde solitaire : « ... Cette onde paraît devoir les propriétés particulières qui la caractérisent à ce que le mouvement qui la produit s'étend aux parties les plus profondes du canal; lorsque l'agitation est seulement superficielle, la loi de la propagation est tout autre; ainsi, comme l'a remarqué le général Morin, lorsqu'un canot se meut dans un canal étroit et profond, il produit, dans certaines conditions de vitesse, une vague qui l'accompagne; si l'on vient à arrêter celui-ci, la vague quitte le canot et se propage en avant, d'abord avec la vitesse originelle qui est celle qu'avait le canot, et par conséquent sans relation avec la profondeur du canal. Ce n'est que plus tard, et lorsque l'agitation superficielle se sera étendue à toute la profondeur de l'eau, que la loi proposée par M. Scott Russell pourra se manifester.... »

Dans le Mémoire que j'ai publié sur les ondes, en 1848, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, j'avais signalé les effets du degré d'enfoncement d'un corps dont le mouvement avait engendré l'onde solitaire. On trouve même dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, année 1844, t. XIX, p. 978 à 980, une Note dans laquelle je donnais l'explication de ce phénomène d'après les mêmes principes. On y remarque cette phrase où, après avoir dit que la vitesse de l'onde solitaire était fonction de la profondeur à laquelle j'enfonçais dans l'eau un cylindre vertical, dont le mouvement horizontal produisait cette onde, j'ajoutais : « Il résulte de mes expériences que l'onde solitaire et l'onde de translation des petits corps flottants sont les deux limites d'une série complète de phénomènes, qui concilie les hypothèses des hydrauliciens sur cet important sujet.... »

J'avais déjà pris date pour ces expériences et cette explication dans une Note du 28 mars 1843, publiée dans le journal *l'Institut*. Je crois utile de transcrire cette dernière Note à la fin de ce Mémoire, non-

seulement comme pièce justificative, mais parce qu'elle contient des détails qui complètent mon Mémoire trop succinct de 1848.

M. le général Poncelet a exprimé on ne peut plus clairement, dans le n° 397 de son *Introduction à la Mécanique industrielle*, l'état où étaient les idées sur ce sujet quand je m'occupai de cette question, ainsi qu'il me fit l'honneur de m'y inviter lui-même. Cependant, en lisant le Rapport précité, je craignis que M. Clapeyron, ou l'un de MM. les Commissaires de l'Institut, n'eût publié avant moi cette idée, puisque je n'avais pas été cité dans ce Rapport, et qu'il s'agissait évidemment de l'interprétation d'un des points les plus intéressants de la partie réellement pratique de la théorie des ondes. Je crus donc devoir lui écrire à ce sujet. M. Clapeyron me fit l'honneur de me répondre le 1er décembre 1863. Voici un extrait de sa lettre : « Mon cher Monsieur, j'avoue à ma honte que je n'ai pas eu connaissance de vos Mémoires sur les ondes, et que j'ai cru, dans le passage dont vous me parlez, n'avancer que des faits depuis longtemps dans le domaine public. J'ai ajouté ce passage à la demande de M. Morin, je me suis même concerté avec lui sur les termes. Quant au Rapport que vous me demandez, j'ai à objecter que le Mémoire est sans doute bien ancien, et qu'il a été sans doute renvoyé à une Commission dont je ne faisais pas partie, n'étant pas encore, je crois, de l'Académie. Vous pourriez cependant, si vous voulez relever cet incident, en faire l'objet d'une réclamation adressée à l'Institut.... »

J'ai cru pouvoir sans indiscrétion publier l'extrait précédent d'une lettre d'un savant ami, qui est une nouvelle preuve de la noble franchise du caractère de cet Académicien si justement regretté. Il ne s'agit pas d'ailleurs d'une réclamation proprement dite, mais il était utile de montrer comment ce passage essentiel d'un Rapport à l'Institut contient l'approbation d'un principe que j'avais publié vingt ans auparavant, comme conséquence de faits très-faciles à reproduire. Ne semble-t-il pas même résulter de cette lettre que M. Clapeyron l'admettait à titre de *fait* d'une manière peut-être encore plus positive que dans le Rapport, qui paraissait présenter une sorte d'hypothèse?

Les détails qui précèdent sont d'ailleurs utiles pour bien préciser l'état de la question. J'ai pu dire que l'onde solitaire ne se présentait pas dans les mers profondes; cela est vrai seulement dans ce sens que

l'onde à laquelle on donne généralement ce nom de *solitaire* est considérée *comme ne jouissant de ses propriétés caractéristiques que lorsque le mouvement peut s'étendre jusqu'au fond de l'eau.* On a vu d'ailleurs comment j'entendais la question dans ma Note de 1842 relativement à la théorie de la houle.

Je remarquerai aussi qu'à la page 106 du tome XIII de ce journal, j'avais signalé la similitude des ondes solitaires et de celles qui ont été observées longtemps auparavant par Bidone, comme résultant de l'abaissement momentané d'une vanne dans l'eau en mouvement d'un canal, similitude signalée aussi dans le Rapport précité, lu par M. Clapeyron, p. 303, d'une manière, il est vrai, plus explicite. Je ne lui avais point d'ailleurs parlé de ce dernier détail.

Ce n'est pas seulement aux questions relatives à la navigation ou même aux effets destructifs des vagues, etc., que se rattache l'étude de l'onde solitaire. On sait qu'elle peut se propager à de très-grandes distances de son origine, sans perdre sensiblement de sa hauteur. Il semble donc qu'elle peut être considérée comme un moyen de faire évacuer l'eau de certaines machines hydrauliques à mouvement alternatif, sans qu'il en résulte nécessairement beaucoup de perte de force vive, puisqu'en général on regarde comme perdue la vitesse de l'eau de décharge.

Cependant il faut tenir compte, précisément d'après ce que je viens de rappeler, de ce que l'onde de translation ne se dégage pas avec la même vitesse dans les diverses circonstances qui se présentent à sa formation. Je conseille de faire dégorger le plus bas possible les bouches de décharge des machines hydrauliques à mouvement alternatif, quand il n'en résultera pas de difficulté d'exécution.

Bien que les frères Weber n'aient pas étudié cette espèce d'onde, comme j'ai observé qu'elle avait beaucoup de rapports avec les ondes courantes, il est intéressant de remarquer une nouvelle sorte de ressemblance qui vient à l'appui de la règle dont il s'agit, sur la profondeur où se fera la décharge des machines hydrauliques.

Quand un tube alternativement rempli d'eau, qui, dans l'appareil des frères Weber, produisait les ondes courantes, débouchait près du fond, les ondes étaient, à ce qu'il paraît, plus allongées que lorsqu'il débouchait près de la surface de l'eau. Ainsi, la longueur des ondes

augmentant en général dans mes expériences avec la profondeur de l'eau au-dessus du fond du canal, toutes choses égales d'ailleurs, on se rapproche des effets résultant d'une augmentation de profondeur, en faisant déboucher le tube près du fond. Mais, abstraction faite des conditions résultant des considérations précédentes, il faut éviter les dispositions qui renverraient l'onde solitaire vers son origine. Elle se répand d'ailleurs assez rapidement comme une barre sur toute la largeur du canal, je veux dire, du moins, si ce dernier n'est pas trop large.

Il ne faut pas confondre ces effets avec ceux des ondes qui se produisent pendant un écoulement continu. Si une large veine d'eau se précipite dans un bassin d'une grande étendue, et qu'il en résulte des ondes dont le courant vient frapper la partie opposée du bassin, il se présente alors de véritables mouvements de clapotage. J'ai eu occasion d'observer des mouvements de ce genre en 1858, pendant le remplissage du nouveau bassin de Cherbourg.

A partir d'une certaine époque de ce remplissage, qui se faisait par une des extrémités du bassin, par suite d'une circonstance particulière, la terre d'un batardeau graduellement démoli était enlevée par le courant qui pénétrait dans ce bassin, déjà rempli jusqu'à une certaine hauteur. J'étais placé précisément en face de l'espèce de cascade qui en résultait. A partir de l'époque où le niveau de ce bassin a atteint celui de la nappe d'eau affluente, le liquide s'est mis à osciller contre la partie opposée à celle par laquelle arrivait cette nappe d'eau. Je n'avais malheureusement aucun moyen de prendre des mesures précises, ne m'attendant pas d'ailleurs à voir le phénomène se produire avec tant d'intensité. L'eau arrivait contre la paroi dont il s'agit, en formant des vagues d'une hauteur qui pouvait être d'environ un décimètre et qui empêchaient les corps flottants de venir la frapper. Les premières vagues réagissaient sur les suivantes, et le clapotage réagissait jusqu'à une distance notable dans le bassin.

J'ai eu occasion dans cette circonstance d'observer, pendant le remplissage d'un bassin très-large par rapport à la nappe d'eau qui y entrait, que le mouvement était loin de s'étendre comme une barre horizontale, mais divergeait, comme on devait s'y attendre; de sorte qu'il y avait une limite assez tranchée entre le reste du bassin et une surface

analogue à une sorte d'éventail terminé par une courbe convexe, l'origine de cet éventail étant, bien entendu, la nappe d'eau affluente. J'ai regretté de n'avoir aucun moyen de mesurer d'une manière précise les dimensions de cette surface, qui n'apparut d'ailleurs que pendant la seconde partie du remplissage, après l'accident arrivé au batardeau.

Avant cette époque, l'écoulement en cascade n'était pas très-fort : le courant traversait le bassin, venait frapper la partie opposée, la plus large du bassin, le long de laquelle le courant s'établissait d'une manière très-visible par ses ondulations, malgré son peu de largeur, jusqu'à l'angle par lequel cette paroi se terminait à son extrémité la plus éloignée et où le courant se perdait en tourbillons.

Mais il est inutile d'entrer ici dans ce genre de considérations; j'ai plutôt voulu fixer les idées sur la manière dont se comportent les ondes résultant d'un mode d'écoulement *en éventail*, et sur la forme générale des surfaces d'érosion de cette espèce d'éventail graduellement croissant pendant le remplissage d'un bassin.

IV.

Applications diverses à l'étude des travaux maritimes, etc.

Il y a eu, comme on sait, une discussion très-intéressante entre MM. Emy et Virla relativement à la théorie des ondes; j'en ai parlé dans mon Mémoire précité de 1848, mais je crois devoir ajouter ici à ce que j'en ai dit quelques observations relatives à l'hypothèse des *flots de fond* de M. Emy, d'autant plus que depuis cette époque on a peut-être perdu de vue l'état de la question.

M. Emy prétendait que lorsque les vagues rencontraient un ressaut brusque, immergé convenablement, le mouvement orbitaire devait pousser en avant des espèces de *bourrelets* donnant lieu à ce qu'il appelait *flots de fond*. Cette assertion ne me semblait pas suffisamment prouvée, parce qu'en supposant que l'on tînt compte de l'action de l'*orbite* sur la partie antérieure, il fallait aussi tenir compte du mouvement orbitaire à la partie postérieure. En supposant que les orbites fussent telles que dans l'hypothèse de M. Emy, on peut dire sans doute qu'il ne resterait de mouvement à la partie postérieure que ce qui n'au-

rait pas été employé à pousser le bourrelet par la partie antérieure de l'orbite. On pouvait cependant se demander si cette raison était réellement suffisante, du moins pour pousser une série de bourrelets inférieurs de manière à former quelque chose d'aussi puissant que le supposait M. Emy. Le mouvement était d'ailleurs en sens contraire de la propagation en avant pour la tangente horizontale de la partie inférieure de l'orbite.

On conçoit, d'après ce que je viens de dire, qu'il n'est pas étonnant que M. Arago, en présentant mes expériences sur les ondes à l'Académie des Sciences, y ait remarqué particulièrement que les corps roulants disposés sur l'axe d'un canal horizontal de section rectangulaire avaient été plus repoussés en arrière qu'en avant, selon mes observations réitérées. J'ai, il est vrai, trouvé depuis cette époque, comme je l'ai expliqué ci-dessus, que ce recul définitif, observé après le passage des ondes courantes, n'avait lieu sensiblement que jusqu'à une certaine distance de l'origine du mouvement alternatif qui les avait engendrées. Mais enfin il est bien remarquable qu'un recul définitif de ce genre s'était présenté d'une manière sensible, même sur un ressaut horizontal brusque, disposé à peu près à la moitié de la profondeur de l'eau.

Cela n'est pas décisif, sans doute, comme si ce recul pouvait être observé à des distances quelconques de l'origine du mouvement. Mais enfin, malgré les circonstances spéciales où ce fait a été observé, il semblera peut-être contraire à la théorie des flots de fond telle que l'entendait M. Émy. Ce savant admettait un mouvement quelconque de progression au sommet des orbites. Il paraît donc qu'à la partie inférieure une direction contraire des molécules devrait être considérée comme je l'ai dit ci-dessus. Cela semble, au premier aperçu, parfaitement conforme à ce que j'ai dit de mes expériences sur le canal en bois, où il y avait progression *définitive* à la surface, et recul *définitif* au fond. Mais comme cela ne s'est présenté que jusqu'à une certaine distance de l'origine du mouvement des ondes courantes, il ne faut pas en tirer de conséquences prématurées, tout en signalant ces faits pour valoir ce que de raison quant à l'application dont il s'agit.

Dans un Mémoire publié en 1850 dans ce journal, t. XV, p. 169, et

suiv., j'ai rappelé à la page 25 que la nouvelle espèce d'ondes à double mouvement oscillatoire et orbitaire avait été annoncée dans l'ouvrage allemand des frères Weber, analysé par M. Airy ; mais il ne paraît pas, comme je l'ai dit ci-dessus, qu'ils se fussent occupés du cas où l'intumescence de l'onde n'est pas sensiblement plus aiguë que le creux. (Ils ne parlent que du cas où les sommets étaient beaucoup plus aigus. Je ne saurais trop insister sur ce point, parce qu'à l'époque où j'écrivis mon Mémoire de 1848 je ne connaissais pas le travail de M. Airy, que je regrette de n'avoir pu citer qu'en 1850, et qui se trouve dans l'*Encyclopedia metropolitana*, t. V, p. 344, année 1835.)

Ce sujet est d'ailleurs tellement vaste, que longtemps encore on ne pourra que réunir des faits avant de se prononcer d'une manière aussi nette qu'il semblait qu'on pouvait le faire de part ou d'autre à l'époque de la discussion célèbre qui eut lieu dans les *Annales des Ponts et Chaussées* entre MM. Émy et Virla.

Ce dernier convenait d'ailleurs des effets puissants de la force vive du mouvement des vagues sur les plages inclinées; mais il les attribuait à des espèces de coups de bélier, c'est-à-dire à des effets de concentration de la force vive des masses resserrées par la pente du rivage, comme on l'admet généralement aujourd'hui pour ce qu'on appelle le *flot courant*, selon une expression usitée par M. Cialdi.

Je vais maintenant donner la copie d'une Note que je considère comme une pièce historique essentielle, ainsi que je l'ai dit ci-dessus. Comme elle développe d'ailleurs, à certains égards, ce que j'ai signalé dans mon Mémoire de 1848, je la crois d'autant plus intéressante qu'elle complétera plusieurs choses dont j'ai parlé dans celui-ci, sans qu'il soit aussi nécessaire de recourir au premier.

Extrait des procès-verbaux des séances de la Société Philomathique de Paris, publiés par le journal l'Institut, p. 45 *du volume tiré à part pour cette Société* (*séance du* 25 *mars* 1843).

« HYDRODYNAMIQUE : *Expériences sur la formation de l'onde solitaire.* — M. de Caligny communique des expériences qu'il a faites sur

le canal de 24 mètres de long dont il a déjà entretenu la Société. Les expériences, objet de cette communication, ont principalement pour but la formation de l'*onde solitaire*, sans mouvement rétrograde bien sensible.

» Un cylindre, dont le diamètre est environ les deux tiers de la largeur du canal, étant enfoncé jusqu'au fond et s'élevant d'ailleurs au-dessus de la surface de l'eau, qui était à $0^{m},20$ au-dessus du fond, ne produisait pas cette onde de la même manière que lorsqu'il était enfoncé à une profondeur moindre. Quand il est enfoncé jusqu'au fond et qu'on le traîne le long du canal d'un mouvement à peu près uniforme en marchant d'un pas ordinaire, ce n'est pas immédiatement devant le cylindre qu'il faut regarder pour voir se former l'onde, mais à une certaine distance en avant. Quand il n'est enfoncé qu'à une certaine profondeur, on voit l'onde se détacher du cylindre. Enfin, quand il est enfoncé seulement à une profondeur très-faible, cette onde ne paraît pas du tout en avant du cylindre, où l'on ne voit que de simples rides, ou ne paraît qu'à la fin de sa course à l'extrémité du canal. Dans le premier cas, lorsqu'on arrive vers la moitié de la longueur du canal, l'*onde solitaire* arrive déjà à l'autre extrémité, tandis que dans le second elle commence seulement à se détacher du cylindre.

» On voit combien la profondeur de la partie plongée influe sur le mode de production de l'*onde solitaire*. Il suffit d'ajouter qu'un cylindre *vertical*, de $0^{m},04$ à $0^{m},05$ de diamètre tout au plus, étant traîné avec une vitesse analogue le long du canal, était toujours précédé d'une onde solitaire quand il arrivait à l'extrémité, quoique le profil de sa partie plongée fût bien moindre que celui de la partie plongée du gros cylindre, dans le cas où ce dernier arrivait à l'extrémité sans être précédé d'une onde solitaire.

» Quant à la vitesse de l'onde solitaire, lorsqu'une fois elle est formée, le gros cylindre étant traîné lentement, puis arrêté, produisait une onde solitaire dont la vitesse moyenne, comptée pendant qu'elle traverse un certain nombre de fois le canal, était la même que lorsqu'on produisait cette onde en traînant quelques instants ce cylindre avec rapidité, et l'arrêtant aussi. Un autre fait déjà cité s'accorde avec celui-ci. Quand cette onde arrive à chaque extrémité du canal, elle y

éteint son mouvement avant de revenir sur ses pas, comme on l'a dit dans les précédentes communications. Or, la vitesse moyenne de l'onde solitaire, considérée à partir de ce point, dépend, comme il a été dit, de la profondeur du canal.

» Ces faits s'accordent avec la manière suivante de considérer le système de l'*onde solitaire*. Concevez deux tubes formant une sorte de grand T renversé, la branche horizontale étant remplie d'eau, et la branche verticale n'en contenant pas. La partie du tuyau horizontal en amont du tuyau vertical est supposée d'abord seule en mouvement. En vertu de ce mouvement, il monte de l'eau dans le tuyau vertical; la pression latérale de cette eau fait naître de la vitesse dans la portion horizontale en aval, et diminue la vitesse dans la portion en amont. Il y a une époque pendant laquelle la vitesse est la même en amont qu'en aval; puis la colonne verticale, en redescendant, éteint graduellement la vitesse en amont, tandis qu'elle l'augmente en aval jusqu'à ce que la colonne d'amont ait en définitive, bien entendu pour certaines proportions dans les longueurs et les hauteurs dues aux vitesses moyennes, produit un effet analogue à celui que les ressorts produisent dans la percussion de deux corps élastiques égaux, dont on sait que l'un peut échanger sa vitesse avec l'autre, qui le réduit lui-même au repos. Si l'on conçoit plusieurs systèmes analogues disposés les uns à la suite des autres, on concevra comment il peut se faire que l'intumescence de l'onde se transporte d'une extrémité à l'autre du canal, en faisant successivement naître et s'éteindre le mouvement, sur toute la hauteur du canal, en chaque point où elle passe, de façon que chaque prisme partiel est à son tour transporté dans le sens du mouvement sans retour bien sensible en arrière, et à une distance évidemment dépendante de la grandeur de l'intumescence, qui semble se transporter d'une manière continue, bien que les choses se passent comme il vient d'être dit.

» Si l'on admet que l'*onde solitaire* s'explique ainsi par un phénomène de colonne oscillante, les lois sur les colonnes oscillantes précédemment communiquées à la Société jetteront beaucoup de jour sur cette matière. On voit déjà pourquoi il y a tant de différence dans le *mode de production* de l'onde solitaire, selon que le cylindre est enfoncé à diverses profondeurs, et pourquoi la profondeur de la partie plongée

paraît être bien plus importante dans cette formation que son profil total. En effet, pour que le phénomène se présente dans toute son intensité, il faut que l'intumescence s'appuie sur du mouvement à éteindre en amont jusqu'au fond du canal.

» D'après ce qui a été dit dans les précédentes communications, les oscillations d'une colonne liquide dans un tube recourbé ou non, enfoncé en partie dans un réservoir, sont d'autant plus rapides que le rapport du diamètre de la partie plongée à celui de la partie qui reste hors de l'eau est plus grand. Cela s'explique parce que, s'il y a plus de masse dans la partie plongée, il y a moins de vitesse à engendrer; et cela est d'ailleurs un résultat très-positif d'expériences en grand. Or, toutes choses égales d'ailleurs, si, dans le canal objet de cette communication, la profondeur est augmentée, il se présentera dans le phénomène de colonne oscillante quelque chose de plus ou moins analogue à ce qui vient d'être dit; de sorte que la vitesse apparente de translation de l'onde sera augmentée, comme elle l'est en effet, par suite de la profondeur du canal, d'autant plus que, pour une longueur donnée de ce canal, le nombre d'oscillations est évidemment plutôt diminué qu'augmenté. La diminution de ce nombre est d'ailleurs un fait d'expérience, et il suffit de l'indiquer pour que le lecteur en tire les conséquences au moyen de la loi sur la durée des oscillations ordinaires, fonctions des racines carrées des longueurs. Il résulte de la nouvelle manière qui vient d'être proposée pour expliquer le système oscillant de l'onde solitaire, que la loi sur la vitesse de translation apparente, fonction des racines carrées des profondeurs, est assez rationnelle, si elle n'est pas rigoureusement exacte physiquement, mais qu'il sera sans doute utile d'y avoir égard dans les calculs sur la navigation des canaux.

» Quand l'onde est très-faible, le mouvement ne doit pas se distribuer jusqu'au fond du canal selon la même loi que pour une onde plus forte; de sorte que les choses se passent sans doute comme si la masse en oscillation était moindre. Cela expliquerait, d'après ce qui vient d'être dit, pourquoi les ondes faibles vont moins vite que les plus fortes à profondeur égale. On conçoit d'ailleurs que les ondes peuvent être assez petites pour ne plus propager le mouvement jusqu'au fond. Enfin, quand les ondes sont très-faibles ou ne sont que de simples

rides, la manière dont se modifient alors les lois des résistances passives explique une diminution de la vitesse et de la course totale.

» Les ondes dites *courantes*, précédées et suivies de creux, présentent, comme il a été dit dans les précédentes communications, une oscillation dans le sens horizontal pour chacun de leurs points, non-seulement au fond, mais à la surface; tandis qu'il n'y a rien de semblable dans l'onde *solitaire*, en ce sens qu'il ne s'y présente que des mouvements de recul extrêmement faibles par rapport aux mouvements de progression dans le sens de la vitesse apparente de l'intumescence. Conformément à ce qui a été dit, les ondes *courantes* proviennent aussi d'un mouvement d'oscillation, mais d'*oscillation de va-et-vient horizontal*. Si le principe de l'oscillation n'était pas le point essentiel de leur système, les espèces de tourbillons elliptiques dans des plans verticaux, qui se présentent dans les régions supérieures, donneraient lieu sur le fond à des tourbillons plus ou moins affaiblis; mais il paraîtrait difficile d'expliquer comment ils s'y transformeraient en mouvements de va-et-vient horizontaux. Il est, au contraire, facile de voir comment le mouvement horizontal, transmis d'abord directement par l'action de l'intumescence, donne lieu à un balancement dans le plan vertical, où les tranches horizontales s'entassent les unes sur les autres, de façon que le point le plus élevé au-dessus du fond est celui dont les oscillations verticales sont les plus grandes. Or, comme l'onde *courante* est précédée d'un creux, il en résulte un contre-courant, une oscillation en retour, et il est facile de voir comment il en résulte des espèces de tourbillons elliptiques dans les régions supérieures du liquide, bien que sur le fond le mouvement de va-et-vient horizontal se soit conservé, tandis qu'il ne se présente pas de semblables tourbillons dans l'onde solitaire, où il n'y a pas d'oscillation bien sensible en retour. On voit que l'onde *solitaire* a dans son principe beaucoup d'analogie avec l'onde *courante* (à oscillation double), et qu'il n'est pas étonnant qu'il y ait aussi beaucoup d'analogie dans les lois de leurs mouvements. »

Dans la citation précédente, comme dans celles que j'ai données ci-dessus de Notes publiées sur mes recherches dans le journal *l'Institut*, j'ai été obligé de reproduire les fautes de rédaction, parce qu'il s'agit,

non-seulement de compléter l'exposition des principaux faits, mais de reproduire, après beaucoup d'années, quelques extraits de véritables pièces historiques relatives à des objets dont on a pu s'occuper depuis sans me citer. J'ai eu soin d'ailleurs de ne les présenter que sous un point de vue qui m'a paru aujourd'hui encore de nature à intéresser le public. Les légères fautes de rédaction dont il s'agit seront facilement aperçues; ainsi il est à peine nécessaire de remarquer qu'à la fin de la Note de 1843 il aurait été bon de répéter les mots *oscillation en retour,* au lieu d'écrire *oscillation double.* Il m'a paru d'autant plus utile de reproduire en entier cette Note de 1843, qu'elle m'a semblé offrir un exemple intéressant de la manière de rendre en quelque sorte sensibles les raisons des phénomènes des ondes, notamment de celui de l'onde solitaire, dont on doit la première démonstration à Lagrange.

Depuis la publication de cette ancienne Note, M. Scott Russell, en 1844, a dit avoir observé le mouvement orbitaire jusqu'à la limite inférieure du mouvement des ondes courantes ; aussi j'ai déjà dit dans mon Mémoire précité de 1848, que j'avais cru devoir présenter des faits tels que je les avais vus, mais sans chercher à leur donner plus de généralité qu'ils n'en ont peut-être, et sans avoir aucune répugnance à admettre ceux qui ont été vus par d'autres observateurs, surtout par un homme aussi distingué.

Je crois cependant pouvoir aujourd'hui déclarer d'une manière plus formelle, quant au système connu sous le nom de *siphonnement des ondes courantes*, tel qu'il était compris par M. Virla, que ce système me paraît inconciliable avec le mouvement de va-et-vient à la surface des flots que j'ai plus particulièrement observé sur les côtes de Normandie, mais que j'ai observé aussi dans bien d'autres circonstances, même à Versailles, sur la pièce d'eau des Suisses, ce qui rend ce genre d'observations facile à répéter dans une multitude de circonstances.

Quoiqu'il reste beaucoup à faire avant qu'on puisse assimiler d'une manière tout à fait convenable les expériences sur les ondes dans les canaux ou réservoirs factices aux grands phénomènes des vagues de la mer, les études de ce genre commencent cependant à être assez avancées pour qu'il ne soit pas impossible d'en tirer parti, sans y avoir, bien entendu, une entière confiance, dans l'étude provisoire des projets de certains travaux maritimes.

Pour donner un exemple de ce que je veux dire, je rappellerai que M. le commandant Cialdi a proposé un moyen de défendre les embouchures de certains ports-canaux. L'auteur proposant un système semblable pour diverses localités, pour l'embouchure du canal de l'isthme de Suez dans la Méditerranée, pour l'embouchure de l'Adour, etc., on pourrait être bien aise d'avoir un moyen d'étudier sur un modèle par expérience, s'il est réellement possible de diriger la force des vagues de manière à convertir, selon les expressions adoptées par l'auteur, *ces dangereux ennemis en robustes esclaves*, c'est-à-dire à les employer eux-mêmes à déblayer des embouchures qu'ils comblaient autrefois.

Si l'on suppose connues les directions principales des vagues dont il s'agit, en tenant compte de la direction des vents dont on a principalement à s'occuper et de la configuration du rivage, il semble très-possible de construire un modèle de dimensions convenables avec plages artificielles de sable, etc.

Les deux espèces d'ondes principales paraissant être les ondes *courantes* et les ondes dites *solitaires* ou *de translation*, je rappellerai les divers moyens indiqués ci-dessus de produire et même d'entremêler ces deux espèces d'ondes dans les directions voulues. Je rappellerai aussi au besoin les moyens que j'ai indiqués pour en multiplier les effets ou pour en augmenter le nombre dans des espaces plus ou moins resserrés comme le sont nécessairement ceux d'un modèle.

En définitive, il ne me paraît pas impossible, du moins après quelques recherches spéciales, de disposer un modèle de manière à étudier, avec quelques chances d'utilité pratique, le système dont il s'agit. On sait d'ailleurs que la plupart des lois de l'hydraulique ont été d'abord établies par des expériences en petit, et que si des modifications y ont été faites depuis par des expériences en grand, les premières ont eu une utilité que personne ne conteste, et qu'on peut ainsi avoir l'espérance d'éviter des dépenses considérables par des études convenablement dirigées. Je ne vois pas pourquoi les études des travaux maritimes ne profiteraient pas aussi des progrès de la partie de la physique objet de ce Mémoire sur les ondes.

Je serais heureux que ces indications pussent faire naître l'idée, à

l'occasion de l'Exposition universelle de 1867, de construire un modèle du système que M. Cialdi propose pour le canal de l'isthme de Suez.

Remarques sur les ondes produites par la décharge des écluses de navigation.

Depuis que ce qui précède est écrit, j'ai appris que les conclusions favorables du Rapport de la Commission d'Ingénieurs des Ponts et Chaussées, qui avait été chargée de faire des expériences en grand sur un système d'écluses dont je suis l'inventeur et dont j'ai parlé dans le tome VII, 2e série, du *Journal de Mathématiques,* avaient été approuvées par M. le Ministre des Travaux publics. Je crois donc devoir, comme nouvel exemple d'application utile de mes recherches sur les ondes, signaler et discuter quelques faits que j'ai observés en 1857 sur le canal Saint-Denis.

Quand on vide un sas d'écluse par les moyens ordinaires, l'eau, en sortant dans le bief d'aval avec des vitesses qui diminuent de plus en plus, cause un gonflement d'où résulte une grande onde de l'espèce appelée *solitaire* ou de *translation.* Dans diverses circonstances, je l'ai vue arriver jusqu'aux portes de l'écluse immédiatement en aval, et occasionner au-dessus d'elles un versement d'une durée suffisante pour faire croire à des personnes qui se trouvaient d'un côté de l'écluse qu'on ne pourrait point traverser le pont de service disposé sur ces portes.

Il est assez difficile de se rendre un compte exact de la quantité d'eau perdue dans les canaux par suite de cet effet qui n'avait peut-être pas encore été signalé. Il dépend évidemment de la hauteur de l'eau dans le bief d'aval, hauteur généralement assez variable. Il est clair que si ce niveau était trop peu au-dessous du sommet des portes de l'écluse d'aval, il pourrait, dans certains cas, se perdre une partie notable de l'éclusée d'amont, et c'est probablement ce qui a souvent lieu dans le service de nuit.

Mais quand il n'en résulterait que des pertes d'eau peu importantes, par suite d'un règlement convenable des niveaux, il n'en serait pas

moins intéressant pour la science de remarquer que si cet effet était supprimé par suite d'un moyen particulier d'épargner l'eau dans les écluses de navigation, il faudrait ajouter une fraction quelconque à l'effet utile obtenu. D'ailleurs, sans rien changer à la hauteur des portes, on pourrait, en évitant le versement dont il s'agit, conserver les niveaux plus élevés dans les biefs, ce qui serait souvent commode pour la navigation des bateaux très-chargés, et permettrait d'augmenter généralement leur tirant d'eau sans rien changer à la profondeur des canaux existants, ni à la hauteur des portes d'écluses que l'on modère pour éviter les inondations.

Or, tout moyen de diminuer à chaque passage la quantité d'eau versée au bief d'aval, étant sans doute une cause de diminution des ondes dont il s'agit, semble permettre de rapprocher le niveau de chaque bief de la limite de hauteur que je viens d'indiquer.

C'est peut-être pour le moyen que j'ai le plus spécialement proposé, et sur lequel j'ai fait les expériences en grand que je rappelle, que cette remarque est le plus essentielle, à cause de la manière dont les ondes sont modifiées par suite du mode d'écoulement alternatif. On conçoit en effet, sans qu'il soit nécessaire de donner ici la description du système, que les ondes formées par un écoulement alternatif doivent être chacune bien moindres que la grande onde principale dont j'ai parlé relativement au canal Saint-Denis.

Or, quand plusieurs ondes de ce genre se suivent et rencontrent un plan vertical contre lequel elles se réfléchissent, comme cela doit arriver à la rencontre des portes de l'écluse d'aval, il se produit nécessairement des effets analogues à ceux dont j'ai parlé ci-dessus, en rendant compte de l'espèce de clapotage qui résulte de la rencontre des ondes réfléchies et de celles qui se dirigent de l'amont à l'aval. Il est nécessaire de revoir ce que j'ai dit ci-dessus relativement aux effets variés des ondes qui se rencontrent et semblent se traverser. Or, si la première onde n'est pas assez forte pour occasionner un versement au-dessus des portes de l'écluse d'aval, elle est obligée de revenir en arrière pour présenter après la rencontre de l'onde qui la suit, et ainsi de suite entre les suivantes, l'ensemble des faits que je viens de rappeler.

C'est même une garantie d'autant plus forte contre le versement à

éviter, que cet ensemble d'actions et de réactions ne peut se faire sans perte de force vive; aussi j'ai souvent observé, lorsqu'une onde solitaire se promène de l'extrémité à l'autre d'un canal, qu'à chaque traversée elle monte un peu moins haut qu'à la traversée précédente contre chaque extrémité du canal. Or, quand deux ondes se frappent pour se séparer ensuite, il se présente des causes de perte de force vive analogues à ce dont je viens de parler, et qu'il ne faut pas seulement attribuer aux effets du frottement dans la traversée.

Il est juste d'observer que lorsque l'écluse se vide, dans le système dont il s'agit, par décharges alternatives, une partie notable de l'eau étant d'ailleurs relevée au bief supérieur, les quantités d'eau descendues à chaque période au bief d'aval augmentant il est vrai de plus en plus, les premières ondes doivent être moins fortes que les suivantes; or on sait que les petites ondes vont moins vite que les grandes. Mais au moins, dans les premières périodes, elles ne se suivent pas à des intervalles assez courts pour qu'il soit probable qu'elles puissent se rencontrer, tant qu'elles marchent dans le même sens, parce qu'elles sont séparées d'abord à cause de la durée du versement de l'eau qui remonte au bief supérieur pendant que la communication avec le bief d'aval est interrompue.

On sait que la vidange des écluses se fait dans le système ordinaire avec des vitesses qui diminuent à mesure que le niveau baisse dans le sas. On conçoit qu'à partir d'une certaine époque la masse d'eau qui en sort n'est pas aussi grande que celle qui peut être débitée par la grande onde de translation résultant de la grande quantité d'eau jetée sous de fortes charges au bief d'aval. On pouvait donc penser que cette onde devait se détacher d'une partie quelconque de l'amas d'eau provenant de la vidange du sas. On la voit en effet se présenter plus distinctement à une distance assez considérable en aval de l'écluse formant une onde principale antérieure; c'est en général celle dont il faut surtout se défier quant au versement au-dessus des portes de l'écluse suivante.

Il se présente bien ensuite d'autres ondes, mais je n'en ai pas remarqué encore s'élevant assez haut pour donner lieu aussi à un versement. Ces ondes plus faibles, après s'être élevées le long des portes de l'écluse d'aval, redescendaient et revenaient en arrière, comme

celles dont j'ai parlé ci-dessus. Cela dépend au reste de la hauteur du niveau de l'eau dans chaque bief.

Il y aura des études intéressantes à faire sur ce phénomène considéré dans des canaux de conditions diverses. Je me proposais seulement ici de donner une idée générale des conséquences qui peuvent en résulter pour divers systèmes d'écluses de navigation.

Quant à ce qui concerne spécialement le système sur lequel j'ai fait des expériences pour vider et remplir les écluses au moyen d'écoulements alternatifs, si, dans la vidange, les premières ondes sont moindres que celles qui les suivent dans le bief d'aval, c'est le contraire pour le bief d'amont quand on y relève une partie de l'éclusée. Or, il doit en résulter des effets variés dans la rencontre des ondes pour chaque bief, et toutes ces rencontres ne pouvant se faire sans perte de force vive, cela même est une cause de diminution dans les hauteurs de ces ondes, ainsi que je l'ai déjà indiqué par les considérations ci-dessus.

Effets singuliers du mouvement de l'eau dans les coudes; application à la recherche des carrières de gravier.

Comme complément aux recherches sur les tourbillons que j'ai publiées en 1850 dans le *Journal de Mathématiques*, je crois intéressant de signaler quelques expériences sur le mouvement de l'eau dans les coudes, considéré dans ses rapports avec la succion des vagues, la constitution géologique des vallées, et notamment les effets singuliers qui peuvent résulter de la disposition des cours d'eau souterrains.

Ayant disposé sur un tube vertical de 2 centimètres de diamètre intérieur, où l'eau coulait de bas en haut, un tube coudé à angle droit vif, dont le sommet était terminé par une paroi à peu près plane, se raccordant avec la partie horizontale de ce coude, j'y ai pratiqué trois petits orifices, l'un très-près de l'angle de ce coude, l'autre au-dessus de l'arête intérieure du tube vertical, le troisième sur la branche horizontale, éloigné du précédent d'une distance égale au diamètre du tube, qui était d'ailleurs le même que le diamètre des deux parties du tube coudé. Ces trois petits orifices étaient sur une même horizontale,

arête supérieure de la seconde partie du coude. Je pouvais les boucher alternativement avec de la cire.

Un jet d'eau sortait verticalement par l'orifice situé à l'angle du coude. Le jet était incliné quand il sortait par le second orifice; son inclinaison, que je ne notai pas exactement n'y attachant pas alors beaucoup d'importance, différait peu de la moitié d'un angle droit avec l'horizontale. Enfin, par le troisième orifice, *il ne sortait pas du tout d'eau* : c'est le point essentiel de cette observation relativement au sujet dont il s'agit, car on peut déjà en conclure que si le coude avait été plongé dans l'eau, celle qui coulait à l'intérieur aurait causé une aspiration, quand même cela n'aurait été qu'en vertu du phénomène de la communication latérale du mouvement des liquides.

Mais il doit y avoir quelque chose de plus dans une partie du coude dont il s'agit; car, en étudiant la question de la succion des vagues, je me suis souvenu d'une observation que j'avais eu occasion de faire il y a longtemps sans y attacher d'importance, sur un canal en planches coudé à angle droit vif au-dessus d'un moulin. L'eau, après avoir frappé la paroi opposée de ce coude, se réfléchissait en donnant aux filets liquides une courbure tournée de manière que la force centrifuge devait s'opposer à la pression qui aurait eu lieu dans l'état de repos contre les parois d'une portion de la branche d'aval du coude.

En réunissant les faits de ce genre à ceux dont j'ai parlé dans le *Journal de Mathématiques* en 1862, j'en conclus que, même pour les angles droits vifs, et à plus forte raison pour certains angles obtus, le mouvement de l'eau dans certains tuyaux coudés est une cause de succion qui dans beaucoup de cas peut être très-puissante sur des cours d'eau souterrains, s'il y a une cavité d'une forme convenable au fond des coudes.

Or, il n'y a rien d'étonnant à ce qu'il se présente dans les rochers sous-marins et autres des tuyaux naturels coudés d'une manière plus ou moins irrégulière; on conçoit même que les phénomènes de ces coudes, sans avoir recours aux dispositions plus analogues à celles dont l'étude m'a conduit à montrer plus spécialement comment on peut utiliser la succion des vagues, présentent des causes de succion assez puissantes pour expliquer peut-être, par exemple, de quelle manière, dans l'île de Céphalonie, un cours d'eau capable de faire mar-

cher plusieurs moulins peut se précipiter dans la terre à un niveau inférieur à celui de la mer. Cette explication serait même plus générale que celles dont j'ai parlé et qui reposent sur le mouvement des vagues, parce que le phénomène qu'il s'agit d'expliquer à Céphalonie paraît ne pas dépendre seulement de l'état de la mer.

M. le Colonel Émy a rassemblé, dans son ouvrage sur les ondes, des documents sur les jets d'eau alternatifs occasionnés par les mouvements de la mer, et dont le plus élevé monterait, selon lui, jusqu'à environ 150 mètres. Sans compter à beaucoup près sur de pareils effets, et même en se réduisant aux observations sur les hauteurs ordinaires qu'il signale, p. 60, etc., à l'ascension de l'eau contre les côtes et les rochers, cela suffit pour montrer l'importance des applications dont nos nouvelles idées sur la succion des flots, exposées dans mon Mémoire précité de 1862, sont susceptibles [*].

Mais quant aux applications du principe exposé ci-dessus aux cours d'eau permanents ordinaires, au moyen de la forme des surfaces qui peuvent être soumises à la percussion de l'eau, il suffit, pour en signaler la possibilité dans des circonstances peut-être d'ailleurs assez rares, de rappeler les faits recueillis sur l'action de l'eau dans les coudes brusques par les anciens hydrauliciens qui n'avaient aucune idée des effets de succion dont il s'agit (*voir* BERNARD, *Principes d'Hydraulique*, n° 285, etc., etc.)

C'est peut-être ici le lieu de remarquer l'influence intéressante que le mouvement de l'eau dans les coudes doit avoir exercée sur la formation des gisements de graviers par des courants anciens dont les géologues admettent l'existence.

J'ai eu occasion de faire à ce sujet une observation qui me paraît mériter d'être signalée, parce que la construction des chemins de fer donnant lieu à l'exploitation de beaucoup de carrières de gravier, il sera sans doute facile de la généraliser et d'en étudier les conséquences d'une manière plus complète.

---

[*] Ces idées sont très-différentes de celles que j'ai exposées en 1843 dans le *Journal de Mathématiques*, dans un Mémoire sur les fontaines intermittentes sous-marines et les courants temporaires, suivi d'une Note de M. Combes qui en développe quelques résultats.

On sait qu'en général dans les coudes l'eau coule principalement dans la partie concave; c'est ce que connaissent parfaitement les marins accoutumés à remonter le cours des fleuves. Il en résulte que les dépôts se font surtout en aval des parties convexes dans les circonstances analogues à la suivante, qui servira d'ailleurs à mieux spécifier ma pensée.

Une vallée, après avoir eu, sur une assez grande longueur, une direction rectiligne, forme un coude dans la partie concave duquel on ne trouve pas de gravier. Il n'y a pas non plus de gravier dans toute la partie rectiligne de ce qu'on peut appeler ses *rives*. Mais il y en a précisément en aval de la partie convexe du coude, dans la portion de l'ancien lit du courant supposé où doivent avoir eu lieu les plus grandes diminutions de vitesse, et où les principaux tourbillons ont dû arrêter les graviers qu'on y trouve.

Il est à remarquer que, non-seulement l'emplacement de ce gravier, mais la diminution graduelle de l'épaisseur de la couche qu'il forme, offrent bien tous les caractères d'un dépôt, d'après les renseignements qu'il m'a été possible de recueillir au moyen des sondages qui y ont été faits par la Compagnie du chemin de fer de Paris à Cherbourg.

Il est même possible que ce soit par un courant, qui n'est peut-être pas extrêmement ancien, que la formation de ce gisement de gravier ait été faite, car une petite rivière qui coule dans cette vallée contient encore du gravier; et d'ailleurs, on conserve le souvenir de plusieurs inondations considérables, dont une a même eu lieu il y a peu d'années, malgré la destruction d'une ancienne forêt qui existait autrefois près de l'origine des versants.

Quoi qu'il en soit, il m'a semblé que ce genre d'observations pouvait être utile, soit pour donner une idée de la manière dont la seule inspection des terrains permettrait, quelquefois du moins, de prévoir l'étendue et l'importance de chaque gisement de gravier; soit pour établir d'une manière plus complète, après l'exploitation des carrières de gravier, étant donnés la profondeur, le mode de variation des couches et surtout l'emplacement par rapport aux coudes des vallées, que ces gisements ont été déposés par les eaux.

On conçoit d'ailleurs, d'après ce que j'ai dit ci-dessus, relativement au mode de succion nouveau qui peut se présenter, même dans certains

cas, vers la concavité des sinuosités des cours d'eau, que cette étude doit devenir très-variée. Il serait assez singulier que ces recherches pussent même servir à éclairer l'Hydraulique au moyen de la Géologie.

J'ai eu occasion de faire une observation semblable sur une carrière de gravier qui est aussi sur le parcours du même chemin de fer. Mais je me suis un peu plus étendu sur la première observation, en ayant eu plus complétement connaissance, parce que j'ai étudié la carrière et les sondages précisément chez moi, à Flottemanville, près Valognes.

Sans entrer ici dans plus de détails, je signalerai encore les effets de la disposition des obstacles dans les coudes des vallées, relativement à la formation définitive de ces vallées quand elles sont plus ou moins sablonneuses, et quand on tient compte d'une manière analogue de l'effet des vents, mais aussi de ce qu'ils peuvent souffler dans des directions opposées.

Nota. M. de Tessan, dans la séance de l'Académie des Sciences de l'Institut du 11 juin (*voir* p. 1271 à 1277 des *Comptes rendus*), vient de faire un Rapport sur l'ouvrage précité de M. Cialdi. On y lit, p. 1276 : « L'appendice contient des Notes ou Mémoires de divers savants. On y trouve entre autres plusieurs Notes de M. de Caligny, souvent cité avec éloge dans le corps de l'ouvrage pour ses divers travaux relatifs au mouvement des ondes liquides. »

Cette citation sera peut-être considérée comme une approbation implicite de M. de Tessan lui-même, relativement à l'ensemble de mes recherches sur les ondes, d'après la manière dont il termine par les mots suivants son Rapport sur cet ouvrage de M. Cialdi : « ... Quoiqu'on puisse différer d'opinion avec l'auteur sur l'explication de quelques faits particuliers peu nombreux et sur la partie pratique de quelques déductions, on ne peut qu'accorder une approbation complète à l'ensemble de son excellent travail, et désirer vivement de voir traduire en notre langue un ouvrage de cette valeur, qui, au mérite d'une vaste érudition et de l'utilité pratique, objet plus spécial de ce Traité, joint le double avantage de faire réfléchir avec fruit et d'exciter à l'observation de faits d'une importance réelle. »

Rapport verbal fait à l'Académie des Sciences sur un ouvrage imprimé de M. Cialdi *intitulé :* Sul moto ondoso del mare e su le correnti di esso, etc.;

Par M. DE TESSAN [*].

Dans la séance du 30 avril dernier, M. le Président m'a chargé de rendre compte à l'Académie d'un ouvrage de M. le commandeur Alexandre Cialdi, de la Marine pontificale, et je viens aujourd'hui m'acquitter de ce devoir.

L'ouvrage de M. Cialdi, écrit en italien, porte pour titre : *Sul moto ondoso del mare e su le correnti di esso, specialmente su quelle littorali ;* Sur le mouvement ondulatoire de la mer et sur ses courants, spécialement sur les courants littoraux.

Comme on le voit, le sujet de cette nouvelle publication est le même que celui des *Cenni sul moto ondoso del mare e su le correnti di esso* du même auteur, publiés en 1856, et présentés alors à l'Académie. Mais si le sujet est le même dans ces deux ouvrages, il est traité avec beaucoup plus de détail et de méthode dans celui dont j'ai à rendre compte à l'Académie.

On sait que les ingénieurs des travaux hydrauliques à la mer ont, en Italie, à lutter incessamment contre une difficulté sans cesse renaissante : l'envahissement des ports par les vases et les sables, et la formation de bancs à l'embouchure des cours d'eau qu'ils obstruent, au double détriment de la navigation et de l'écoulement des eaux douces.

L'explication de ces atterrissements fâcheux a donné lieu, depuis longtemps, à deux théories bien distinctes : la première, la plus généralement adoptée en Italie avant les publications de M. Cialdi, les fait dépendre du courant littoral qui longe à petite distance toutes les côtes

---

[*] C'est le Rapport cité plus haut par M. de Caligny. (J. L.)

de la Méditerranée de gauche à droite pour un observateur placé à terre et regardant la mer; les vagues, dans cette théorie, n'ayant d'autre effet que de mettre en suspension dans l'eau les matériaux qui constituent le fond de la mer près des côtes, et de les livrer ainsi à l'action du courant littoral qui, seul, les transporterait et les déposerait aux lieux où ils s'accumulent.

L'autre théorie, celle que soutient M. Cialdi, et dont il a mis la vérité en complète évidence dans son excellent ouvrage, fait dépendre ces atterrissements du transport vers le rivage et du dépôt, opérés par les vagues elles-mêmes, des matériaux qu'elles ont soulevés du fond de la mer, le courant littoral ne jouant qu'un rôle très-secondaire ou même insignifiant dans ce transport et ce dépôt.

Ces deux théories rivales, qui ont compté parmi leurs partisans les savants les plus distingués de l'Italie, ont donné lieu à de très-vives discussions, et M. Cialdi n'a pas été l'un des moins ardents dans ces débats scientifiques.

Le vif désir d'établir sur une base inébranlable, sur des faits positifs, la vérité de la théorie qu'il avait embrassée, a conduit cet infatigable chercheur à compulser tous les ouvrages écrits, soit en italien, soit en français, soit en anglais, et traitant de l'action des vagues et des courants sur les côtes, et, par une suite toute naturelle, à consulter tous les ouvrages écrits en ces trois langues et contenant des vues sur la constitution intime des ondes liquides et des vagues de la mer au large et près des côtes. De plus, il a profité de plusieurs voyages qu'il a faits en Italie, en France et en Angleterre, pour se mettre en relation avec les savants et les ingénieurs qui s'occupent de ces difficiles questions, et pour recueillir leurs opinions.

C'est ainsi que, par vingt-cinq années de recherches assidues, M. Cialdi est parvenu à rassembler un nombre immense de faits et d'opinions dont l'ensemble, joint à ses propres observations faites dans le cours de ses longues navigations et de ses explorations sur les côtes, constitue le fond de son utile traité.

On se fera une juste idée de l'étendue de ces recherches quand on saura que plus de cinq cents auteurs, parmi lesquels on compte trente-cinq Membres de cette Académie, sont cités dans cet important travail.

L'exposition que fait M. Cialdi de tous les faits qu'il a rassemblés,

de toutes les opinions qu'il a recueillies et de toutes les observations qu'il a faites lui-même, est claire, nette, précise et parfaitement coordonnée pour arriver au but qu'il s'était proposé d'atteindre en l'écrivant. Et si la vivacité que l'on remarque dans quelques passages de son livre pouvait faire croire que l'auteur n'est pas encore parvenu à convaincre tous les partisans de la théorie rivale, le lecteur impartial restera cependant convaincu, après examen, que M. Cialdi a parfaitement établi, par des preuves de fait surabondantes, l'exactitude de la théorie qui attribue à l'action des vagues une très-grande prépondérance sur celle du courant littoral dans les atterrissements et les érosions des côtes.

L'auteur, après avoir bien établi ce point capital, s'est demandé s'il ne serait pas possible à l'art de diriger le travail des vagues de manière à leur faire produire des érosions là même où naturellement elles produisent des atterrissements fâcheux : par exemple, à l'entrée des canaux endigués qui conduisent de la mer dans les ports, aux points mêmes où tendent à se former les bancs ou barres si nuisibles à la navigation et à l'écoulement des eaux douces, et à transformer ainsi, suivant la remarquable expression de Scott Russel, *les vagues, ces dangereux ennemis, en robustes esclaves.*

M. Cialdi pense avoir trouvé un expédient, relativement facile, pour opérer ce changement si désirable. Cet expédient est très-rationnel ; mais, lorsqu'il s'agit de lutter contre des forces aussi puissantes et aussi peu connues dans leur mode d'action que celles qui sont mises en jeu par la mer sur les côtes, l'expérience seule peut prononcer d'une manière définitive sur la valeur réelle des moyens employés pour les combattre. Elle ne l'a pas fait encore, mais elle ne tardera pas sans doute beaucoup à le faire ; car cet expédient, approuvé par le Gouvernement pontifical et par les magistrats de Pesaro, est aujourd'hui en voie d'exécution à l'embouchure de l'Izauro, sur la côte nord-est des Marches d'Ancône.

Il serait impossible, sans entrer dans de trop longs détails et sans l'emploi de figures, de donner une idée nette et précise de l'expédient imaginé par M. Cialdi : c'est dans son ouvrage même qu'il faut la chercher. Qu'il nous suffise de dire qu'après avoir dévié par une courbe régulière l'axe du canal endigué, de manière qu'à l'embouchure de ce

canal l'axe soit perpendiculaire à la bissectrice de l'angle que font entre elles les directions des vents dominants et des vents régnants, c'est-à-dire des vents les plus violents et des vents les plus fréquents, M. Cialdi propose de construire deux appendices de quelques centaines de mètres chacun, disposés de manière à recueillir les vagues formées sous l'influence de ces vents, et à les diriger transversalement vers l'embouchure du canal, de telle sorte que leur action se concentre sur le point même où la barre tend à se former, et qu'elles la balayent incessamment.

M. Cialdi propose d'appliquer son système au port Saïd, sur la rade de Péluse, où l'expérience pourrait être faite sur une grande échelle, sans augmentation sensible de la dépense prévue pour la construction des digues projetées et sans dommage pour le port, si, contrairement aux prévisions de l'auteur, l'expédient ne réussissait pas. Mais il est à croire qu'avant d'entreprendre cette expérience en grand, on voudra connaître le résultat de l'expérience en petit faite à Pesaro. Car on peut craindre que les vagues, en s'épanouissant à la sortie de l'entonnoir qui les dirige, ne laissent déposer les matériaux les plus pesants qu'elles entraîneront, à l'entrée même du canal, à l'abri de la digue du vent, où, il est vrai, leur draguage serait plus facile. On peut craindre, en outre, que les bâtiments qui tenteront l'entrée par les vents régnants ne soient trop exposés à la manquer, étant pris de flanc et portés sous le vent par les vagues rendues plus puissantes par leur concentration.

Si l'expérience se prononce en faveur de l'expédient de M. Cialdi; si, comme il le pense, le mal n'est pas seulement déplacé, mais supprimé, ce savant aura rendu un immense service à la navigation et au commerce; car ce ne sont pas seulement les ports et les cours d'eau des côtes de la Méditerranée qui sont sujets aux atterrissements et aux obstructions, mais ceux des côtes de la Manche et de l'Océan, et ceux des côtes du monde entier sont dans le même cas, et jusqu'à présent l'art n'a réussi qu'à déplacer l'obstacle par des travaux incessants sans parvenir à le faire disparaître.

L'ouvrage de M. Cialdi forme un volume grand in-8° de plus de 700 pages; il est divisé en 5 chapitres, 56 articles et plus de 1600 paragraphes numérotés; et le tout est suivi d'un long appendice et de 5 planches.

Dans le premier chapitre, l'auteur expose brièvement, ou plutôt passe rapidement en revue les divers travaux théoriques sur le mouvement des ondes faits dans les divers pays de l'Europe et même de l'Amérique, et fait remonter à Léonard de Vinci, son compatriote, les premières idées justes sur ce sujet difficile et encore trop peu connu. C'est un abrégé trop succinct de l'état actuel de la science relativement à la théorie du mouvement ondulatoire de l'eau.

Dans le deuxième chapitre, M. Cialdi expose ses propres vues sur le mouvement intime des particules d'eau dans les vagues, ou plutôt constate que l'on manque d'expériences suffisantes pour s'en faire une idée juste, conclut à ce qu'il faut se borner pour le moment à recueillir des faits, et passe à l'exposition de ceux qui sont relatifs à l'action du vent sur la mer et à cette même action sur les côtes dans quelques cas extraordinaires.

Dans le troisième chapitre, l'auteur mentionne tout ce qu'il a pu recueillir dans ses nombreuses lectures relativement à la hauteur, à la longueur et à la vitesse de propagation des vagues de la mer. Il constate la pénurie des observations précises sur ce triple sujet, et engage vivement les navigateurs à combler cette lacune. Il s'étend ensuite longuement sur les observations qui peuvent faire connaître jusqu'à quelle profondeur les vagues exercent sur le fond de la mer une action assez sensible pour mettre en mouvement les matériaux meubles qui composent ce fond.

On remarquera certainement à la fin de ce chapitre l'exposition des expériences très-soignées faites en commun par l'auteur et le P. Secchi sur la transparence de l'eau de mer, au large de Civita-Vecchia, et la savante discussion à laquelle le P. Secchi les a soumises. Les physiciens et les géomètres auront toutefois à juger jusqu'à quel point il est permis d'admettre, avec ces deux savants, que la profondeur à laquelle cesse d'être visible un disque de $2^{m},37$ de diamètre seulement, et qui n'occupe, lors de sa disparition, que la 2800e partie du champ de la vision, est la même que la profondeur à laquelle cesserait d'être perceptible, même par une simple altération de la couleur de l'eau, un disque occupant le champ tout entier de la vision, un champ 2800 fois plus grand : comme c'est le cas pour l'immense banc des Aiguilles au cap de Bonne-Espérance. Ils auront aussi à juger jusqu'à quel point on

peut admettre que, même par beau temps et belle mer (car le changement de couleur de l'eau, sur le banc des Aiguilles, est visible en tout temps), les vagues peuvent encore exercer, à 200 mètres de profondeur, une action assez grande pour soulever le sable jusqu'à plus de 150 mètres de hauteur, et cela dans un lieu où l'eau se renouvelle constamment avec une vitesse de près de 2 mètres par seconde, vitesse supérieure à celle de la Seine, à Paris, dans ses débordements.

Enfin, ceux qui voudraient admettre que, sur ce banc, par beau temps et belle mer, le sable est soulevé et porté à la surface, non par les vagues, mais par le courant lui-même, opinion dans laquelle ils pourraient être confirmés par l'abaissement considérable (4 degrés centigrades) que la température de la mer éprouve en passant du large sur le banc, ceux-là, dis-je, auront à expliquer comment ce banc, constamment balayé par un tel courant, n'a pas disparu depuis longtemps, ou bien à rechercher par quelle cause il se renouvelle sans cesse à la même place en conservant constamment la même hauteur.

Dans le quatrième chapitre, M. Cialdi a groupé tous les faits relatifs au transport horizontal qui accompagne le mouvement de propagation des vagues, soit au large, soit près des côtes. Il admet au large, lorsque le vent est très-fort, un mouvement de transport très-notable, même au point de vue de la navigation, de l'eau à la surface de la mer et jusqu'à une certaine profondeur. Mais il l'y croit insensible, du moins pour la navigation, lorsque le vent est modéré ou nul et qu'il n'y a que de la houle; tandis que, près des côtes basses, il regarde le mouvement de transport comme toujours très-notable, qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas de vent.

L'auteur fait ressortir la nécessité de tenir compte, lors des vents très-forts, de cette dérive temporaire de la surface de la mer au large, dans la recherche des courants pélagiques permanents. Il montre le danger que le transport causé par les vagues près des côtes basses fait courir aux navires, insiste pour qu'on le prenne en sérieuse considération dans la navigation, et demande la construction de tables qui permettraient de l'apprécier.

Dans le cinquième et dernier chapitre, M. Cialdi arrive à l'objet le plus spécial de son livre : à l'influence que le transport produit par les vagues exerce sur les atterrissements, et à la grande prépondérance de

cette action sur celle des courants littoraux. L'auteur établit cette vérité sur des preuves extrêmement nombreuses, développe la théorie de l'expédient qu'il a imaginé pour éviter la formation des barres à l'entrée des canaux endigués qui conduisent de la mer dans les ports, et s'étend particulièrement sur l'application qui s'en fait à Pesaro et sur celle qu'il propose d'en faire à Port-Saïd.

L'appendice contient des Notes ou Mémoires de divers savants. On y trouve entre autres plusieurs Notes de M. de Caligny, souvent cité avec éloge dans le corps de l'ouvrage pour ses divers travaux relatifs au mouvement des ondes liquides.

Le tout est précédé d'un Rapport très-approbatif fait à l'Académie *dei Nuovi Lincei,* par le P. Secchi, au nom d'une Commission composée de quatre membres illustres de cette Académie : MM. Cavalieri, Volpicelli, Ponzi et Secchi rapporteur.

L'immense quantité de faits et d'opinions que contient cet ouvrage, l'ordre et la clarté avec lesquels ils y sont exposés, le fera lire avec beaucoup d'intérêt, non-seulement par les ingénieurs et les marins, mais encore par les physiciens et les géologues, et même par les géomètres qui voudraient entreprendre le travail si désirable d'appliquer le calcul à un phénomène aussi peu connu dans sa constitution intime que celui des vagues de la mer.

Quoiqu'on puisse différer d'opinion avec l'auteur sur l'explication de quelques faits particuliers peu nombreux et sur la portée pratique de quelques déductions, on ne peut qu'accorder une approbation complète à l'ensemble de son travail et désirer vivement de voir traduire en notre langue un ouvrage de cette valeur, qui, au mérite d'une vaste érudition et de l'utilité pratique, objet spécial de ce Traité, joint le double avantage de faire réfléchir avec fruit et d'exciter à l'observation de faits d'une importance réelle.

Sur le Déplacement d'un corps solide; nouvelle Méthode pour déterminer les normales aux lignes ou surfaces décrites pendant ce déplacement;

PAR M. MANNHEIM [*].

1. *Tout déplacement infiniment petit d'une figure plane dans son plan est une rotation autour du centre instantané de rotation.*

2. De cette proposition on déduit immédiatement que : *Les normales aux trajectoires des différents points d'une figure que l'on déplace d'une manière continue dans son plan passent toutes, à un instant quelconque du déplacement, par un même point.*

De là résulte une méthode que M. Chasles a fait connaître, pour déterminer les normales aux courbes décrites pendant le déplacement continu d'une figure de forme invariable.

3. Je me suis proposé de faire, pour le cas du déplacement continu d'un corps solide, ce que M. Chasles a fait pour le déplacement d'une figure plane.

C'est le résultat d'une partie de mes recherches sur cet objet que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie.

4. On sait que : *Tout déplacement infiniment petit d'un corps solide est un déplacement hélicoïdal autour de l'axe instantané de rotation glissant;* et le problème consiste à trouver la dépendance entre cet axe et les trajectoires des points du solide. Pour arriver à formuler

---

[*] Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (séance du 25 juin 1866).

cette dépendance, qui ne s'aperçoit pas immédiatement, il suffit de combiner la propriété qui vient d'être rappelée avec la suivante :

Les plans normaux aux trajectoires de tous les points d'un plan que l'on déplace d'une manière continue passent, à un instant quelconque du déplacement, par un point de ce plan [*].

5. On arrive ainsi à cet énoncé :

Théorème fondamental. — *Si l'on mène, parallèlement à un plan fixe arbitraire, les normales aux trajectoires des différents points d'un corps solide que l'on déplace d'une manière continue, ces normales s'appuient, à un instant quelconque du déplacement, sur une même droite parallèle à l'axe du déplacement.*

Cette droite passe par le foyer du plan arbitraire supposé entraîné : je l'appellerai l'*adjointe* de ce plan.

On remarquera que, dans cette manière d'exprimer la liaison entre les normales aux courbes décrites pendant le déplacement d'un solide, l'axe du déplacement n'intervient que par sa direction.

6. Ce théorème a des conséquences nombreuses; quelques-unes suffiront, je l'espère, pour en montrer l'importance.

Considérons dans un corps solide les points qui sont situés sur des droites parallèles entre elles, et appliquons le théorème fondamental en prenant pour plan fixe un plan (P) perpendiculaire à toutes ces droites. Par suite de cette position particulière de (P), les normales, parallèles à ce plan, aux trajectoires des points de cette droite sont perpendiculaires aux droites mêmes; elles sont donc aussi les normales

---

[*] C'est par l'énoncé de cette propriété que M. Chasles commence son beau Mémoire sur les *Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace* (*Comptes rendus*, 26 juin 1843). Il donne le nom de *foyer* au point du plan mobile par lequel passent les plans normaux des trajectoires des points de ce plan. Il désigne sous le nom de *caractéristique* la droite suivant laquelle le plan mobile touche son enveloppe. Cette enveloppe est une développable que M. Chasles appelle *développable trajectoire*. J'adopterai, dans ce qui va suivre, toutes ces expressions, et, pour faciliter le langage, je dirai simplement l'*axe du déplacement*, au lieu de l'*axe instantané de rotation glissant*.

aux surfaces gauches engendrées par ces lignes. Nous pouvons donc dire :

Des droites A, B, C,..., *parallèles entre elles, liées d'une manière invariable et entraînées dans le même déplacement continu, engendrent des surfaces gauches qui jouissent de cette propriété : à un instant quelconque du déplacement, les normales à ces surfaces issues des points de* A, B, C,... *s'appuient sur une même droite, l'adjointe du plan perpendiculaire à* A, B, C,....

7. On sait que les normales issues de tous les points d'une génératrice d'une surface gauche appartiennent à un paraboloïde hyperbolique. D'après cela, le théorème précédent peut s'énoncer ainsi :

Des droites A, B, C,... *parallèles entre elles, liées d'une manière invariable et entraînées dans le même déplacement continu, engendrent des surfaces gauches qui jouissent de cette propriété : à un instant quelconque du déplacement, les paraboloïdes des normales de toutes ces surfaces ont une génératrice commune.*

8. Considérons maintenant une surface cylindrique; pendant son déplacement continu elle enveloppe une surface qui la touche suivant une certaine courbe : les trajectoires de chacun des points de cette courbe sont tangentes à la surface cylindrique. Par suite :

Une surface cylindrique, déplacée d'une manière continue, est, à un instant quelconque du déplacement, touchée par son enveloppe, suivant une ligne qui jouit de cette propriété : les normales à la surface cylindrique issues de tous les points de cette ligne s'appuient sur une même droite, qui est l'adjointe du plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre.

9. En particulier : *Des plans parallèles à une droite et liés entre eux d'une manière invariable sont entraînés dans le même déplacement; à un instant quelconque de ce déplacement, les plans normaux aux développables trajectoires de ces plans, menés respectivement par les caractéristiques de ceux-ci, passent par une même droite, l'adjointe du plan perpendiculaire à tous les plans entraînés.*

10. Ce théorème, appliqué à des plans passant par une même

droite R, montre que réciproquement les caractéristiques de ces plans sont les projections d'une même ligne L, adjointe du plan perpendiculaire à R. On peut donc dire que ces caractéristiques appartiennent à la surface lieu de l'arête du dièdre droit mobile dont les faces passent constamment par les deux droites R et L. Ce lieu est un hyperboloïde; nous retrouvons ainsi ce théorème de M. Chasles :

Quand plusieurs plans passent par une même droite, leurs caractéristiques forment un hyperboloïde à une nappe.

Mais nous voyons de plus, par la génération même de cet hyperboloïde, qu'il est particulier, puisqu'il en résulte que ses sections circulaires sont respectivement perpendiculaires à deux de ses génératrices. Nous pouvons dire aussi : *Lorsque des faisceaux de plans sont entraînés dans le même déplacement, chacun d'eux donne lieu à un hyperboloïde; l'un des systèmes de sections circulaires de tous ces hyperboloïdes est perpendiculaire à l'axe du déplacement.*

11. Nous avons considéré d'abord des droites parallèles entre elles, puis des plans parallèles à une même droite. Si l'on prend simultanément dans un corps solide des droites et des plans parallèles à une même droite, on aura, en vertu du théorème fondamental, une seule droite, adjointe du plan à la fois perpendiculaire à toutes les lignes et à tous les plans entraînés. Cette remarque est très-utile, comme nous allons le voir dans l'application que je vais faire des théorèmes précédents.

12. *Un trièdre de grandeur invariable se déplace suivant des conditions données; on demande de construire :* 1° *les caractéristiques de ses faces;* 2° *le plan tangent en un point quelconque de la surface lieu d'une de ses arêtes;* 3° *la tangente à la trajectoire d'un point quelconque.*

Désignons par (A), (B), (C) les trois faces du trièdre. Pour définir son déplacement, nous dirons, par exemple, que ces faces touchent trois surfaces données, deux de ces surfaces étant touchées respectivement par (A), (B) en des points situés sur deux courbes (a), (b) données.

Appelons a, b, c les points de contact de (A), (B), (C), à un instant quelconque du déplacement, avec les trois surfaces données, a et b

appartenant aux courbes (a), (b). La caractéristique de (A) est la tangente conjuguée en a à la tangente de (a); de même pour (B). Appelons α et β ces deux caractéristiques, et construisons la caractéristique γ de (C).

Les plans normaux à (A) et (B) menés par α et β se coupent suivant une droite L, parallèle à l'axe du déplacement. Menons la normale en c à la surface qui contient ce point, et prenons la trace de cette droite sur le plan normal à (B) qui contient β. En menant de cette trace une droite M parallèle à L, on a une ligne qu'il suffit de projeter sur (C) pour avoir la caractéristique γ de cette face. La tangente en c, au lieu (c) des points de contact analogues à celui-ci, n'est autre que la tangente conjuguée de la ligne que nous venons de déterminer.

Cherchons le plan tangent en un point quelconque d de l'intersection D des faces (A), (B) à la surface engendrée par cette ligne. La droite L, étant l'adjointe du plan perpendiculaire à D, est rencontrée par les normales à la surface gauche considérée. Pour avoir le plan tangent en d, il suffit donc de mener par D un plan perpendiculaire au plan de d et de L.

Enfin, pour construire la tangente à la trajectoire d'un point quelconque s entraîné dans le déplacement du trièdre, on mène par ce point un plan perpendiculaire à l'intersection D des faces (A), (B) : ce plan rencontre L en un certain point, la ligne qui le joint au point s est normale à la trajectoire de s. On opère ensuite de même au moyen de la droite M. On a ainsi deux normales qui définissent le plan normal, et par suite on a la tangente cherchée.

13. On voit, par cette application, que dans la méthode des normales qui résulte de mon théorème fondamental, il n'est pas question de l'axe du déplacement. Cet axe ne joue donc pas dans l'espace un rôle analogue au centre instantané sur le plan.

14. Si néanmoins on veut construire cet axe de déplacement, il suffit de remarquer qu'il est l'adjointe du plan perpendiculaire à sa direction. Nous avons dit que l'adjointe L d'un plan (P) passe par le foyer de ce plan. Par ce point, on mènera un plan perpendiculaire à L : la trace de ce plan sur (P) rencontrera l'axe du déplacement à

angle droit. Si l'on a les adjointes de deux plans, on obtiendra ainsi deux droites dont la perpendiculaire commune est l'axe du déplacement [*].

EXTRAIT DU JOURNAL *L'INSTITUT*.

Dans cette séance [**], M. Mannheim développe la communication qu'il a faite le 25 juin à l'Académie des Sciences, puis il ajoute :

Le théorème fondamental de cette communication a surtout pour objet de montrer la liaison qui existe entre les normales aux trajectoires des points d'un corps solide que l'on déplace d'une manière continue et la direction de l'axe de ce déplacement.

Si l'on n'a en vue que la détermination des normales aux lignes ou surfaces décrites pendant le déplacement du corps solide, il est avantageux de l'employer concurremment avec le théorème suivant dont il n'est qu'un cas particulier :

Un corps solide se déplace d'une manière continue, les normales aux trajectoires des points de ce corps qui s'appuient, à un instant quelconque du déplacement, sur une droite arbitraire, rencontrent une deuxième droite.

Ces deux droites, suivant une ancienne dénomination de M. Chasles, sont des *droites conjuguées* [***].

A proprement parler, ce théorème ne diffère que par la forme de celui-ci, qui est dû à M. Chasles :

Quand plusieurs plans passent par une même droite, leurs foyers sont sur une deuxième droite.

Il conduit à une solution très-simple du problème suivant :

Construire le plan normal à la trajectoire décrite par un point d'un corps solide assujetti, en se déplaçant, à remplir cinq conditions données.

Examinons, comme exemple, le cas où le corps doit toucher cinq surfaces données.

---

[*] M. Poncelet a construit l'axe du déplacement, connaissant les vitesses de trois points d'un corps solide en mouvement. M. Chasles a construit l'axe du déplacement, connaissant les trajectoires de trois points du corps solide que l'on déplace. Dans les conditions qui définissent le déplacement du trièdre de notre application, on ne donne la trajectoire d'aucun point.

[**] Séance du 14 juillet 1866 (Société Philomathique).

[***] *Voir* le Mémoire présenté à l'Académie des Sciences par M. Chasles dans la séance du 26 juin 1843. Dans une communication faite à l'Académie le 3 juin 1861, M. Chasles désigne ces mêmes droites sous le nom d'*axes de rotation conjugués*.

Considérons à un instant quelconque les points où la surface du corps mobile touche ces surfaces. Menons en ces points les normales aux surfaces qui les contiennent. Prenons, parmi ces cinq normales, deux groupes de quatre droites; construisons les deux droites rencontrant à la fois les quatre lignes de chacun de ces groupes. On obtient ainsi deux couples de *droites conjuguées*.

Les deux droites issues d'un point quelconque du corps solide, qui s'appuient sur les droites de chacun de ces couples, déterminent en ce point le plan normal cherché.

Lorsqu'un corps solide n'est assujetti qu'à quatre conditions, ses points se déplacent sur des surfaces; à un instant quelconque, les normales à toutes ces surfaces s'appuient sur deux droites.

Appliquées à l'étude du déplacement continu d'une droite dans l'espace, ces théorèmes permettent de déterminer facilement le plan tangent à certaines surfaces réglées.

On arrive ainsi, par exemple, à déterminer le plan tangent en un point quelconque de la surface gauche engendrée par une droite tangente à une surface donnée et osculatrice à une deuxième surface.

Cette surface gauche est circonscrite aux deux surfaces directrices; comme conséquence de ce qui précède, on construit aussi la tangente à la courbe suivant laquelle elle touche l'une de ces surfaces directrices.

SUR LES DEUX FORMES

$2x^2+3y^2+4z^2+4zt+4t^2,\quad x^2+2y^2+6z^2+6t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On aurait peut-être à vaincre de grandes difficultés si l'on cherchait une expression simple et générale des nombres

$$N(n=2x^2+3y^2+4z^2+4zt+4t^2)$$

et

$$N(n=x^2+2y^2+6z^2+6t^2)$$

de représentations qu'un même entier n peut avoir séparément sous chacune des deux formes marquées en tête de cet article. Mais on obtient sans peine la valeur de la somme suivante,

$$\begin{gathered}4N(n=2x^2+3y^2+4z^2+4zt+4t^2)\\+6N(n=x^2+2y^2+6z^2+6t^2).\end{gathered}$$

Je me suis assuré, en effet, que cette valeur est égale à celle de cette autre somme,

$$\begin{gathered}N(3n=x^2+2y^2+2z^2+2t^2)\\+9N[n=3(x^2+2y^2+2z^2+2t^2)],\end{gathered}$$

dont les deux termes s'expriment tout de suite au moyen de ce que j'ai communiqué dans le cahier de juillet 1861 relativement à la forme

$$x^2+2(y^2+z^2+t^2),$$

qui peut s'écrire

$$x^2+2y^2+2z^2+2t^2.$$

On remarquera que

$$N[n = 3(x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2)] = 0$$

quand n n'est pas divisible par 3, tandis que pour n divisible par 3, ou pour $n = 3q$, l'on a

$$N[n = 3(x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2)] = N(q = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2).$$

Je laisse d'ailleurs au lecteur à trouver la formule explicite qui résulte naturellement des considérations précédentes, et je n'ajoute même pas de vérifications numériques : il n'y a ici aucune difficulté.

2. Le théorème que nous venons de donner au n° **1** contient comme cas particulier celui que nous avons donné dernièrement dans le cahier d'avril (p. 131).

Remplaçons en effet n par $2n$ (n restant entier), et d'après le théorème du n° **1**, les deux sommes

$$\begin{aligned} &4N(2n = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4zt + 4t^2) \\ &+ 6N(2n = x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 6t^2) \end{aligned}$$

et

$$N(6n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2) + 9N[2n = 3(x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2)]$$

seront égales. Or on a évidemment, d'une part,

$$\begin{aligned} &N(2n = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4zt + 4t^2) \\ &= N(n = x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 6t^2) \end{aligned}$$

et

$$N(2n = x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 6t^2) = N(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2),$$

puis, d'autre part,

$$N(6n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2) = N(3n = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2)$$

et

$$N[2n = 3(x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2)] = N[n = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2)].$$

Ayez égard à ces réductions, et vous retomberez sur le résultat inscrit

dans le cahier d'avril. Tout cela tient à la liaison intime qui existe entre les deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2, \quad x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

au sujet desquelles nous avons donné dans le temps tous les détails désirables.

NOUVELLES MACHINES POUR LES ÉPUISEMENTS;

PAR M. ANATOLE DE CALIGNY.

I.

Principes d'une nouvelle machine pour les épuisements destinée à utiliser les grandes chutes d'eau et à tirer l'eau des puits très-profonds. — Considérations diverses sur les grandes colonnes liquides aspirantes, et sur les effets de la chaleur dans les colonnes d'air comprimé.

L'appareil dont il s'agit a été étudié relativement à un problème proposé à l'occasion d'un grand pluviomètre qui avait été projeté pour l'Observatoire de Paris, et aurait pu servir à élever de l'eau au moyen d'une grande chute pour faire des arrosages. Je suppose qu'un tuyau de conduite, qui aurait pu être, dans le cas dont il s'agit, un tuyau de gouttière, descende d'un réservoir contenant de l'eau à une hauteur considérable par rapport à celle à laquelle on veut élever de l'eau d'un niveau inférieur, à celui par exemple d'un jardin qu'on voudrait arroser. On pourrait en général produire l'effet voulu au moyen d'une machine à colonne d'eau faisant marcher une pompe.

Je me propose, sans employer au besoin une plus grande longueur de tuyau, de produire un effet semblable sans piston ni pompe, et sans changement brusque de vitesse, dans des circonstances où le bélier aspirateur de Montgolfier ne semble pas pouvoir être appliqué avec avantage par des raisons que j'expliquerai plus loin. On sait d'ailleurs combien les hydrauliciens désirent éviter l'emploi des pompes.

Le tuyau descendant du bief supérieur serait toujours plein d'eau et ouvert par le sommet. S'il est mis en communication à sa partie inférieure avec une capacité contenant de l'air, et dans laquelle il entre par-dessous en se recourbant verticalement, on conçoit qu'en

supposant même qu'on négligeât la vitesse acquise dans ce tuyau pendant la compression de cet air, ce dernier serait bientôt soumis à une pression plus grande que celle qui serait due à la pression hydrostatique d'une colonne d'eau dont la hauteur serait égale à celle d'où l'on veut tirer de l'eau du niveau inférieur. Cette dernière est d'ailleurs beaucoup moindre par hypothèse que la hauteur du bief supérieur au-dessus du réservoir d'air. Ce réservoir d'air peut être au-dessous du niveau inférieur d'où l'on veut tirer le liquide, du moins en général à une assez petite hauteur au-dessus, quoiqu'il puisse en principe être beaucoup au-dessus.

Si l'on interrompt la communication entre cette capacité remplie d'air et d'eau qui est arrivée par-dessous, et le tuyau descendant du bief supérieur, pour l'établir entre cette même capacité et un tuyau de conduite rempli d'eau comme le premier, mais ne s'élevant par son extrémité supérieure toujours ouverte que pour déboucher dans un réservoir disposé à la hauteur où l'on veut, par exemple, faire des arrosages, l'air comprimé agissant sur l'eau de ce dernier tuyau y engendrera graduellement de la vitesse.

Or, si, quand cette vitesse sera suffisante pour l'objet qu'on se propose, les communications sont rétablies comme ci-dessus, c'est-à-dire le tuyau d'amont étant ouvert et le tuyau d'aval étant bouché, l'eau en mouvement dans ce dernier exercera une succion sur ses parois inférieures. Mais si un clapet disposé à cette extrémité permet à l'eau d'un réservoir inférieur, d'où l'on veut la tirer, d'entrer par un tube particulier dans le tuyau d'aval, elle sera aspirée en vertu du mouvement acquis dans ce dernier tuyau, jusqu'à ce que la vitesse y soit éteinte. Pendant que cet effet se produira, l'air sera de nouveau comprimé par la colonne d'amont, et l'on conçoit que les mêmes effets pourront se reproduire indéfiniment.

Pour mieux préciser ma pensée, j'ai supposé une très-grande différence entre les hauteurs des colonnes liquides d'amont et d'aval. Mais il est intéressant de remarquer qu'il pourrait ne pas en être ainsi, surtout si l'on tenait compte de la vitesse acquise dans la colonne comprimante pendant la compression de l'air, ce qu'il convient en général de ne pas négliger. Cependant, il était utile de montrer qu'à la rigueur on pourrait négliger cet effet si, par exemple, on voulait établir un

appareil de ce genre pour tirer l'eau d'un puits dans une ville où les tuyaux de conduite pourraient avoir une charge d'eau considérable, mais où l'on craindrait peut-être, du moins dans les premiers essais, qu'il n'y eût des espèces de coups de bélier, si l'air était comprimé dans un réservoir d'une petite étendue, au lieu de l'être dans un grand récipient analogue à celui d'une machine de Schemnitz.

Dans l'un et l'autre cas, il est intéressant de remarquer que l'eau peut être élevée d'un puits d'une profondeur quelconque au moyen de ce principe, pourvu que le réservoir d'air soit à une profondeur suffisante. En effet, quelle que soit la hauteur d'une colonne liquide, si elle est en mouvement de bas en haut, on conçoit qu'elle tend à faire le vide à son extrémité inférieure, comme le ferait un piston qui serait mû de bas en haut à cette profondeur, jusqu'à ce que la vitesse acquise de la colonne liquide, ainsi devenue aspirante, soit éteinte.

Ce principe de l'emploi du mouvement acquis de bas en haut par une colonne liquide d'une hauteur quelconque n'a pas seulement pour objet cette machine particulière qui offre un exemple de ses applications; c'est un principe général qu'il est intéressant de signaler.

Je vais maintenant indiquer des dispositions au moyen desquelles cet appareil peut fonctionner de lui-même. Je suppose, pour simplifier, que les eaux motrices sont des eaux de pluie, et je ne présenterai d'abord que la combinaison la plus facile à comprendre sans figure.

On conçoit que la capacité contenant de l'air peut être mise alternativement en communication avec chacun des deux tuyaux d'amont et d'aval, au moyen d'un tube vertical mobile, bouché par le fond, ouvert par le sommet, et percé d'un orifice latéral, offrant en définitive un tiroir d'une forme analogue à celle des tiroirs que j'ai employés dans mes premiers appareils, dont j'ai donné les dessins dans un Mémoire intitulé : *Résumé des expériences de* M. Anatole de Caligny *sur une branche nouvelle de l'hydraulique*, publié dans le *Technologiste*, en 1850.

Il est à remarquer qu'en vertu de cette disposition, la pression de l'air comprimé fera descendre ce tiroir, si son déclic est lâché en temps utile, et qu'en vertu de cette même pression un contre-poids peut être soulevé, quoique ayant assez de force pour relever ensuite ce tiroir,

lorsqu'un autre déclic sera lâché à une époque convenable quand l'air se sera détendu dans les limites voulues.

Pour que ces effets se produisent, il n'est pas nécessaire que la détente de l'air comprimé fasse descendre sa pression au-dessous de celle de la pression atmosphérique. Or, si un flotteur est alternativement soulevé par l'eau dans le réservoir d'air, on conçoit qu'il est facile de s'en servir pour lui faire alternativement lâcher les deux déclics dont je viens de parler, ce flotteur pouvant d'ailleurs faire fonctionner une tige traversant les parois, sans laisser passer l'air au moyen de dispositions connues.

Cette capacité est la seule partie du système où l'eau doit revenir bien sensiblement en arrière. Maintenant on demandera d'après quels principes on doit régler les dimensions de ce réservoir d'air. Cela dépend des dispositions du tiroir, présenté ici comme exemple d'application, et auquel d'autres moyens pourraient être substitués. Mais il suffit, en général, de donner à ce réservoir d'air des dimensions plus grandes que cela n'est absolument nécessaire, quand on veut se servir de la vitesse acquise de la colonne d'amont. En effet, on peut réduire l'espace occupé par l'air, en y introduisant préalablement de l'eau, et il sera facile d'obtenir par expérience la quantité dont il sera le plus convenable de réduire ainsi cet espace.

Cela permet d'avoir plus de place pour disposer le flotteur avec facilité, et cela a d'ailleurs l'avantage de varier, si l'on veut, les quantités d'eau débitées par un même appareil. S'il y a plus de chemin à parcourir à chaque période, la moyenne des vitesses sera évidemment augmentée. Comme il ne s'agit ici que d'exposer des principes, je n'entrerai pas dans plus de détails sur les moyens d'exécution.

Il n'est pas nécessaire que les tuyaux aient un grand diamètre pour éviter une trop grande perte de travail par les frottements de l'eau, parce que le réservoir d'air permet, comme je viens de l'indiquer, de régler à chaque période les courses des colonnes liquides, de manière à ne pas laisser développer des vitesses plus grandes qu'on ne le veut. Mais il est utile que le tuyau d'aval, dans certaines circonstances, ait un plus grand diamètre que le tuyau d'amont, quand la colonne d'amont sera beaucoup plus haute que celle d'aval. En effet, dans cette hypothèse, le travail de l'air comprimé sous une pres-

sion beaucoup plus grande que celle de la colonne d'aval pourrait engendrer de trop grandes vitesses dans cette dernière, pour qu'il n'en résultât pas beaucoup de frottement, si elle n'était pas convenablement élargie.

Il n'est pas nécessaire que le réservoir d'air soit plongé dans l'eau à épuiser. Il est plus commode qu'il soit en général un peu au-dessus, le plus près possible cependant de son niveau, afin que la colonne liquide contenue entre le réservoir d'air et l'eau à épuiser soit la plus courte possible. Cependant, on peut se servir de ce système pour vider un bassin au moyen d'un tuyau d'aspiration jusqu'à la limite de profondeur où l'aspiration peut se faire.

Il est utile que les tuyaux d'amont et d'aval aient des longueurs développées convenables. Ces longueurs peuvent même être disposées de manière que, si elles sont assez grandes nécessairement, à cause de la disposition des lieux, pour qu'on ait à s'occuper sérieusement des frottements, l'eau ne s'arrête jamais, ni dans l'un, ni dans l'autre, pendant un temps sensible, ce qui permettra de diminuer beaucoup la moyenne des vitesses, et, par suite, les résistances passives pour une même quantité d'eau débitée. On conçoit, en effet, que l'écoulement au moyen de deux réservoirs d'air peut commencer dans l'un quand il finit dans l'autre.

Je suppose l'appareil en repos, et le tuyau d'amont bouché. L'eau du tuyau d'aval comprimera l'air à l'intérieur de sa capacité, de manière que le flotteur n'agisse sur aucun des deux déclics ; il suffira de lâcher un de ces déclics avec la main, pour que l'appareil se mette en marche, celui qu'on lâchera permettant au tuyau d'amont de se déboucher.

Il n'est pas indispensable qu'il y ait un clapet dans le tuyau d'amont, pour empêcher le mouvement de retour quand l'air est comprimé à son maximum en vertu de la vitesse acquise. Cependant, il pourra être prudent d'en disposer un immédiatement au-dessous du réservoir d'air. On conçoit qu'il est naturel de choisir ce point s'il y a deux réservoirs d'air disposés sur une bifurcation, et que, d'ailleurs, il est convenable de ne pas disposer ce clapet à une distance où, s'il y avait quelque mouvement en retour, il en résulterait un petit coup de bélier plus qu'inutile.

Cet appareil est moins simple que le bélier aspirateur de Montgolfier ; aussi, je ne le présente encore spécialement que pour les grandes chutes motrices, ou pour tirer l'eau de très-grandes profondeurs d'après le principe exposé ci-dessus ; je veux dire quand ces profondeurs seront plus grandes que la hauteur d'une colonne d'eau faisant équilibre à la pression atmosphérique.

Voici, selon moi, par quelles raisons le bélier aspirateur, tel qu'il est décrit par Montgolfier, ne paraît point applicable à une grande chute devant servir à tirer de l'eau d'une petite profondeur. D'abord, il serait impossible d'y appliquer la disposition la plus connue, dans laquelle le tuyau d'aspiration est le plus près possible de l'origine du tuyau d'amont, si ce tuyau, comme pour le projet relatif au pluviomètre projeté à l'Observatoire, descend d'une grande hauteur, et a, par conséquent, un développement déjà considérable quand il arrive au point d'où l'on veut tirer l'eau.

Mais il y a une autre disposition très-curieuse que Hachette dit avoir été employée avec succès. L'eau en mouvement arrive contre un matelas d'air disposé à l'extrémité d'aval du tuyau de conduite ou corps de bélier. Quand cet air est comprimé en vertu de ce mouvement, il se détend en refoulant la colonne liquide vers le bief d'amont. Or, on profite de cette détente pour faire aspirer l'eau d'un niveau inférieur par un tube particulier débouchant dans la capacité du matelas d'air. Je rappelle seulement le principe sans entrer dans les détails.

Si cette disposition est applicable à certaines chutes médiocres, elle offre une sérieuse difficulté pour les grandes chutes qui dépassent la hauteur d'une colonne liquide faisant équilibre à la pression atmosphérique, pour les chutes d'une quinzaine de mètres par exemple.

On conçoit, en effet, qu'il en résulterait des pressions très-considérables auxquelles le matelas d'air devrait être soumis, en vertu de la vitesse acquise de la colonne liquide, afin que l'oscillation en retour dont je viens de parler pût, en refoulant la colonne d'eau, lui imprimer assez de vitesse en arrière pour produire une aspiration d'une certaine force.

La difficulté devient encore plus évidente, si la profondeur d'où l'on veut aspirer l'eau est assez grande ; si, par exemple, elle est au

moins de 5 ou 6 mètres, non-seulement il faudrait que les pressions produites sur le matelas d'air fussent très-grandes, mais il faudrait qu'à chaque période on laissât écouler une quantité d'eau motrice assez notable pour obtenir ces pressions; de sorte qu'il en résulterait une augmentation assez considérable de frottements et d'autres résistances passives, pendant que la vitesse de sortie serait engendrée.

Il n'y a aucune difficulté de ce genre dans le système objet de cette Note : l'eau n'y revient point sensiblement vers le bief d'amont, et il ne serait pas même indispensable que l'air se détendît au-dessous de la pression atmosphérique, s'il n'en résultait pas un moyen commode employé par Montgolfier pour entretenir l'air de ses récipients, moyen qui peut être appliqué à l'appareil dont il s'agit.

Il est à remarquer que la compression pouvant se faire près du niveau de l'eau à épuiser, et même à la rigueur au-dessous, la hauteur de la colonne d'amont, dans l'hypothèse ci-dessus d'une quinzaine de mètres, étant augmentée par exemple de 5 à 6 mètres, le chemin parcouru serait moindre, toutes choses égales d'ailleurs, que pour le matelas d'air dans la disposition que j'ai rappelée ci-dessus d'après Hachette, comme ayant été exécutée par Montgolfier.

Ce n'est point en vertu d'un écoulement préalable au niveau du bief d'aval que la compression se fera dans ce système, où l'eau partant du repos comprimera l'air en vertu de la vitesse graduellement engendrée, pendant qu'elle montera dans le réservoir d'air.

La compression de l'air est ici un moyen, tandis qu'elle constitue le résultat industriel à obtenir dans les compresseurs à colonnes liquides oscillantes qui fonctionnent au moyen de grandes chutes d'eau, à Bardonnèche, pour le percement des Alpes.

Ainsi que je l'ai rappelé dans le *Journal de Mathématiques*, année 1862, p. 199, j'avais, depuis beaucoup d'années, signalé divers moyens de comprimer de l'air en laissant la force vive se développer dans une colonne liquide partant du repos, et vidant ensuite la chambre de compression, en employant d'ailleurs une oscillation descendante au-dessous du niveau d'aval, pour pouvoir comprimer des quantités d'air indéfinies en multipliant les périodes avec avantage.

L'objet de la Note que je publie aujourd'hui n'est pas le même; mais quoique la compression de l'air n'y soit employée que comme

un moyen, il est intéressant de faire observer que cette compression alternative ne peut se faire sans une augmentation de chaleur d'où résulte une perte de travail. On a remarqué que si l'on comprimait de l'air avec une machine analogue à celle de Schemnitz, où, comme on sait, la colonne liquide comprimante débouche dans une capacité très-large par rapport au tuyau de conduite d'amont, on éviterait, autant que possible, la partie du déchet provenant de ce développement de chaleur. Mais on sait qu'il résulterait de cette disposition une autre cause de perte de force vive provenant de ce que la colonne liquide comprimante s'évaserait dans un espace très-large par rapport à sa section. L'examen de cette question fera l'objet d'une Note sur la théorie de la chaleur.

On peut, d'ailleurs, au moyen de mes expériences sur les rétrécissements des colonnes liquides oscillantes, montrer dans quelles limites assez étendues [*] on pourrait élargir la chambre de compression, sans que cette perte de force vive fût bien notable, de manière qu'on pût avoir moins de machines et profiter, jusqu'à un certain point, d'une diminution d'échauffement de l'air, à cause de la diminution des vitesses de la surface liquide comprimante.

Mais, pour l'appareil objet de cette Note, il se présentera, dans les applications, une circonstance singulière sur les conduites d'eau des villes, où, à chaque instant, les pressions en un point donné peuvent varier à cause des prises d'eau, par exemple à cause des bornes-fontaines des environs du point où l'on aurait besoin de tirer l'eau d'un puits.

Dans ces circonstances, il pourra être convenable de ne pas compter, pour une marche régulière automatique, sur les avantages pouvant résulter de l'emploi du mouvement acquis de la colonne liquide comprimante.

On conçoit, en effet, que si les pressions motrices étaient trop variables à cause des prises d'eau, cela changerait trop les conditions de la marche de l'appareil ; si, au contraire, on comprime l'air dans

---

[*] Il est facile de voir, même sans entrer dans des considérations délicates relatives à la théorie de la compression de l'air, qu'on pourrait au moins tripler la section de la chambre de compression des appareils à colonnes oscillantes de Bardonnèche.

un grand récipient, en ne comptant pour cela que sur la pression hydrostatique, le flotteur sera alternativement soulevé. Or, il faudra bien qu'il finisse par atteindre la hauteur voulue pour faire décrocher un déclic, parce que la pression hydrostatique nécessaire finira toujours, avec le temps, par redevenir assez grande pour comprimer l'air au degré de tension voulu lorsque les prises d'eau seront arrêtées aux environs.

Quant aux cas où l'on emploierait la vitesse acquise de la colonne comprimante, il se présente une question théorique intéressante.

Il résulte de mes expériences sur les oscillations des colonnes liquides, exposées dans un de mes Mémoires pour lequel l'Académie des Sciences m'a fait l'honneur de me décerner le prix de Mécanique en 1839, que, dans des limites très-étendues, on peut augmenter la longueur de la partie toujours remplie d'eau d'un tuyau de conduite, quand le diamètre n'est pas trop petit, sans diminuer les amplitudes des oscillations, si les vitesses ne sont pas trop petites.

L'augmentation des longueurs des surfaces frottantes est alors, en général, compensée par la diminution des carrés des vitesses auxquels les frottements de l'eau sont supposés proportionnels quand les vitesses sont assez grandes. J'ai même remarqué que, dans ce cas, la longueur des surfaces frottantes diminuait, bien entendu pour un diamètre constant, la somme des résistances passives locales, telles que celles des coudes qui ne sont pas proportionnelles à la longueur des surfaces frottantes pour une vitesse donnée.

Il était naturel d'en conclure que, dans des limites très-étendues, il serait utile d'augmenter la longueur développée du tuyau de conduite contenant la colonne liquide comprimante, sauf les raisons d'économie dans le prix d'établissement de l'appareil. En effet, si, toutes choses égales d'ailleurs, on a un moyen de diminuer les vitesses avec lesquelles on comprime l'air, on diminuera évidemment aussi le développement de chaleur pendant cette compression, d'autant plus qu'on peut encore diminuer, comme je l'ai dit ci-dessus, par un élargissement convenable de la chambre de compression, la vitesse de la lame liquide comprimante.

Quelques objections m'ont été faites relativement à ce point particulier, à cause des difficultés qui semblaient provenir de considéra-

tions délicates sur la nouvelle théorie de la chaleur dont je parlerai dans une autre Note. Mais il suffit de remarquer que si l'air s'échauffe moins, toutes choses égales d'ailleurs, sa tension, variable pendant la compression, sera moindre pour chaque volume donné, et que, par conséquent, cela diminuera la quantité de travail résistant provenant de ce développement de chaleur sur la tête de la colonne comprimante.

J'ai proposé, en 1861, dans une Note publiée dans le *Bulletin de l'Académie de Belgique*, une méthode pour calculer la partie du déchet provenant du développement de la chaleur dans la chambre de compression d'une machine à comprimer de l'air, au moyen de colonnes liquides oscillantes, mises en mouvement par une chute d'eau. Cette méthode provisoire est suffisante pour montrer qu'à Bardonnèche la partie du déchet provenant de la perte de chaleur n'est pas à dédaigner.

Ici, le cas n'est pas le même, non-seulement parce que la chute d'eau et la hauteur de la chambre de compression seront sans doute, en général, beaucoup moindres, mais parce qu'on ne donne pas à l'air le temps de perdre aussi complétement sa chaleur. On conçoit, en effet, que le travail employé à produire cette chaleur peut se retrouver, en partie du moins, pendant la détente ; la tension, variable il est vrai, qui résulte, pendant cette détente, de ce que l'air est plus chaud qu'à l'extérieur, est une cause qui agit sur la colonne d'aval pour lui imprimer de la vitesse.

II.

Principes d'une nouvelle machine pour les épuisements, spécialement applicable au cas où l'eau à épuiser doit s'élever au-dessus du niveau de l'eau du bief supérieur de la chute motrice. — Modèle fonctionnant.

Un tuyau de conduite descend verticalement d'un réservoir alimenté par les eaux motrices, et débouche horizontalement par son autre extrémité, toujours ouverte et convenablement évasée, au-dessous du

niveau du bief inférieur. Une soupape de Cornwall met alternativement en communication ce tuyau vertical avec un autre tube de même diamètre que le premier à son extrémité inférieure, mais qui se rétrécit graduellement pour contenir le moins d'air possible, et dont l'autre extrémité recourbée débouche dans une capacité supérieure alternativement remplie par l'eau élevée. Le premier tuyau est toujours rempli d'eau, et le second, toujours rempli d'air dans sa portion rétrécie, arrive par son extrémité supérieure au-dessus de la capacité dont il s'agit; celle-ci communique, par un tuyau d'aspiration toujours rempli d'eau, avec le bief supérieur; il plonge dans ce bief avec un clapet de retenue.

Quand la soupape de Cornwall est ouverte, l'eau du bief d'amont descend dans le premier tuyau, en y engendrant graduellement de la vitesse. Lorsque la vitesse suffisante est acquise, cette soupape est soulevée en vertu d'un phénomène de succion, de sorte que le bout de tuyau mobile dont elle est composée réunit le premier tuyau de conduite au tuyau contenant de l'air, comme s'ils ne formaient qu'un seul et même tube.

Alors la colonne liquide dont je viens de parler continue à se mouvoir, et son sommet baissant de plus en plus permet à la colonne d'air de se dilater entre ce sommet et la capacité supérieure où l'on a au besoin introduit préalablement une quantité d'eau convenable ainsi que dans son tube d'aspiration supposé toujours plein. Il en résulte que l'eau du bief supérieur monte dans cette capacité jusqu'à ce que les vitesses des colonnes liquides soient éteintes. Or cette ascension se fait seulement à partir de l'époque où l'air est suffisamment dilaté, et l'on sait que dans les anciennes machines à air dilaté on perdait le travail employé à faire cette dilatation préalable.

Dans cette nouvelle machine, l'eau contenue dans le tuyau de conduite qui descend du bief d'amont au bief d'aval revient en arrière, en vertu même de cette dilatation, à partir du moment où la vitesse de la colonne descendante est atteinte. La soupape de Cornwall est tenue appliquée de bas en haut sur ses deux siéges annulaires, tant que l'aspiration qui la tient fermée est assez forte, à cause de la manière dont l'air extérieur agit, par l'intermédiaire de l'eau, sur son anneau inférieur. Mais la cause qui la tenait soulevée malgré son poids n'existant

plus, lorsqu'en vertu du retour de l'eau par son intérieur la densité de l'air est redevenue la même que celle de l'air extérieur, elle retombe tout simplement en vertu de son propre poids, pour que le jeu recommence, et ainsi de suite indéfiniment. On va voir comment l'eau élevée sort de la capacité supérieure.

Un clapet disposé dans cette capacité au-dessous du niveau d'un réservoir latéral, où l'eau élevée doit se verser pour être utilisée, empêche l'eau de ce dernier réservoir de rentrer dans cette capacité, mais permet à l'eau contenue dans cette dernière de sortir quand la densité de l'air intérieur est redevenue suffisante, comme pour des machines connues à air dilaté.

J'ai même supprimé ce clapet dans le modèle fonctionnant que j'ai exécuté, au moyen d'un siphon renversé dont j'avais communiqué verbalement le principe à la Société Philomathique de Paris, le 24 août 1839, pour ces anciennes machines à air dilaté.

Une des extrémités de ce siphon débouche dans la capacité où l'eau est aspirée; l'autre débouche un peu au-dessus du niveau de l'eau dans le réservoir latéral où elle doit être reçue en définitive. Les branches de ce siphon descendent au-dessous du niveau de l'eau du bief supérieur, qui reçoit les eaux motrices.

A l'époque où l'aspiration se fait, l'eau descend dans la branche extérieure, et la colonne liquide, contenue dans la branche en communication avec la capacité où l'eau monte en vertu de cette aspiration, se trouvant suspendue à cause de la pression de l'air extérieur, interrompt la communication avec cet air, comme le ferait une soupape. Quand la densité égale à celle de l'air extérieur se rétablit graduellement, l'eau remonte dans cette branche extérieure et finit par en sortir en se versant dans le réservoir latéral où elle doit être utilisée, mais d'où elle ne peut revenir dans cette capacité, l'extrémité extérieure du siphon s'élevant au-dessus de l'eau de ce réservoir.

Je n'attache encore qu'une importance secondaire à cette disposition, qui permet de supprimer un clapet, mais qui peut avoir ses inconvénients. Je ne suis pas d'ailleurs assez sûr qu'elle soit nouvelle.

Mais ce qui distingue l'appareil, objet de cette Note, c'est surtout l'emploi d'un travail qui, dans les anciennes machines à air dilaté, était perdu. Dans la machine à air comprimé, décrite ci-dessus, je donne

aussi un moyen d'utiliser un travail qui, dans les anciennes machines à air comprimé, était perdu jusqu'à l'époque où la compression était suffisante pour soulever une colonne liquide de la hauteur voulue. Abstraction faite des applications dont ces deux nouvelles machines seront susceptibles, je crois devoir insister sur cette circonstance qui permet au moins de compléter un point intéressant de la théorie des machines hydrauliques, en établissant des principes nouveaux.

On peut atténuer beaucoup l'inconvénient des machines à air dilaté remarqué par Hachette, en enveloppant les capacités et les tubes où l'air se dilate, dans des *chemises métalliques* remplies d'eau, ce moyen paraissant très-propre à conserver aux parois une imperméabilité convenable à l'air extérieur.

J'avais très-peu d'eau à ma disposition quand j'ai construit un modèle fonctionnant de cette machine, ayant seulement voulu m'assurer de la réalité de son jeu, en l'établissant d'une manière très-provisoire, au moyen des débris d'autres expériences; j'élevais l'eau à beaucoup plus du double de la hauteur de chute. Il est évident qu'on pourrait, avec une petite chute et un seul réservoir à air dilaté, en un mot sans compliquer la disposition de ce modèle, élever de l'eau beaucoup plus haut avec une même chute motrice, au moyen d'une dilatation convenable de l'air intérieur. Mais, au delà de certaines limites, il y aurait des inconvénients, parce que cette dilatation causerait un mouvement de retour beaucoup plus fort que cela ne serait nécessaire d'après ce qui va être dit. Il rentrerait plus d'eau que cela n'est utile dans le bief supérieur à l'époque de l'ouverture de la soupape de Cornwall, et cela se ferait avec une vitesse qui donnerait lieu à une perte notable de force vive et de travail en résistances passives.

Il est facile de voir qu'on pourrait y appliquer une disposition ingénieuse de la machine de Branca [*] reproduite par de Trouville; mais je tâche autant que possible d'éviter ces complications, et je me contente pour le moment de proposer l'emploi d'une seule capacité aspirante.

Je réunis, en tâchant de les simplifier l'un et l'autre, le principe du

---

[*] *Le Machine,* volume nuove e di molto artifizio del signor G. Branca, ingegniere et architetto della santa casa di Loretto. Roma, 1629

bélier aspirateur et celui d'un appareil à air dilaté, en leur appliquant, comme intermédiaire, le jeu d'une colonne liquide oscillante qui les modifie complétement, et le jeu d'une soupape de Cornwall reposant sur un genre particulier de succion.

Avant d'exécuter ce modèle fonctionnant, j'avais étudié ce mode de succion d'une manière qu'on pourra être bien aise de reproduire dans les cabinets de physique. Un vase en zinc portait au milieu de son fond un tube vertical fixe, ouvert à ses deux extrémités, et dont le sommet assez au-dessus de ce fond portait un rebord extérieur sous lequel l'anneau inférieur du bout de tuyau mobile, appelé soupape de Cornwall, venait s'appliquer quand le sommet de cette soupape venait s'appliquer aussi contre un anneau attaché à la partie inférieure d'un autre tuyau fixe, avec lequel il s'agissait de réunir le premier au moyen de cette soupape.

On bouchait d'abord la partie inférieure du premier tuyau, que l'on remplissait d'eau ainsi que le vase; or, quand on le débouchait subitement, la soupape de Cornwall se levait brusquement et réunissait les deux tuyaux en un seul.

Pour qu'elle se soulève, il n'est même pas nécessaire que l'extrémité inférieure du tube supérieur soit plongée dans l'eau. J'ai remarqué un soulèvement très-notable, même lorsque cette immersion n'avait pas lieu, et que l'extrémité supérieure du tube inférieur était seule plongée dans l'eau, ainsi que la soupape. Je ne sais pas encore si cela suffirait pour relever entièrement cette soupape dans certaines conditions; mais ce soulèvement m'a paru offrir quelque intérêt, parce qu'il se fait en sens contraire du mouvement des poutrelles qui s'immergent dans les déversoirs, en vertu d'un phénomène de succion connu.

Quant aux cas où la soupape de Cornwall se relève complétement, il y aura à faire des études assez variées sur son jeu pour diverses ouvertures; cette soupape, ou tube mobile de 1 décimètre de diamètre, se relevait très-facilement à une hauteur égale à ce diamètre pour réunir les deux tuyaux fixes.

Il est intéressant de remarquer que l'appareil, objet de cette Note, permet de ne pas mêler l'eau élevée avec l'eau motrice, comme cela se fait nécessairement dans le bélier aspirateur. Cette circonstance peut avoir quelque utilité à cause des qualités de l'eau qu'il s'agit d'élever.

C'est parce que les circonstances de la pratique sont extrêmement variées, qu'il est plus utile qu'on ne le croit généralement d'étudier ce genre de questions sous des points de vue très-variés, si l'on veut parvenir, dans beaucoup de cas, à se débarrasser de l'emploi des pompes.

On sait que Montgolfier disposait un réservoir d'air dilaté au sommet du tuyau d'aspiration, du moins pour la forme la plus connue de son bélier aspirateur. Il en résultait une complication qui n'est pas indispensable dans ce nouveau système, si l'on donne au tuyau de conduite inférieur une longueur convenable.

Dans cet appareil on utilise, ainsi que dans le précédent, le mouvement acquis de l'eau dans le tuyau de conduite, parce qu'on modère les vitesses de la colonne liquide en employant convenablement l'inertie, de manière à retrouver un travail perdu dans les anciens systèmes à air comprimé ou dilaté. Il est de plus intéressant de remarquer que le travail qui, dans ces anciens systèmes, était employé, soit à comprimer l'air jusqu'au moment où l'eau pouvait être soulevée par le ressort de cet air à la hauteur voulue, soit à dilater l'air jusqu'au moment où une colonne d'une hauteur donnée pouvait être mise en mouvement de bas en haut par la pression extérieure de l'atmosphère, était entièrement perdu.

On voit que, par des combinaisons très-différentes, on peut, dans l'un et l'autre cas, obtenir la solution de ces deux problèmes qui ont dans leur but une analogie nouvelle et intéressante.

NOTE SUR LA SURFACE DE L'ONDE;

Par M. Émile MATHIEU.

Dans notre Mémoire sur la dispersion de la lumière, nous avons fait remarquer que la surface de l'onde qui se propage dans un corps solide homogène et d'élasticité variable dans tous les sens, est en général du cent cinquantième degré, et nous avons indiqué le principe sur lequel repose cette proposition; cependant, pour qu'elle soit démontrée en toute rigueur, il est nécessaire d'ajouter quelques explications.

Commençons par faire quelques remarques sur l'équation qui donne les abscisses des points de contact des tangentes à une courbe algébrique parallèles à une direction donnée ou celles des points de contact des plans tangents à une surface algébrique parallèles à un plan donné.

En premier lieu, considérons une courbe algébrique du degré m, ayant pour équation

$$(1) \qquad M(x, y) = 0;$$

on aura l'équation dont nous venons de parler en éliminant y entre (1) et

$$(2) \qquad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dy} = 0.$$

Soit

$$(3) \qquad \varphi(x) = 0$$

cette résultante. M. Liouville, dans un Mémoire qui renferme un grand nombre de résultats d'analyse et de géométrie et dont un extrait se trouve dans l'*Algèbre supérieure* de M. Serret, a donné, au tome VII

de son *Journal* (année 1841, p. 363), le moyen de calculer les premiers termes de cette résultante; mais, en particulier, il résulte de son analyse que l'équation (3) est du degré $m(m-1)$ toutes les fois que la fonction formée par la somme des termes de plus haut degré de l'équation (1) ne renferme pas de facteurs multiples.

Si la courbe a un point dont les coordonnées satisfont aux équations

$$(4) \qquad \frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0,$$

il est évident que son abscisse satisfait à la résultante (3), et même, d'après un théorème de M. Poncelet, les abscisses des points de rebroussement sont racines triples, et celles des points doubles (réels ou imaginaires) racines doubles [*]; mais ce qu'il nous suffit ici de remarquer, c'est que si la courbe a des points qui satisfont aux équations (4), leurs abscisses sont racines de l'équation (3), et que, dans le cas contraire, les racines de la résultante (3) seront toutes les abscisses de points de contact au nombre de $m(m-1)$.

En second lieu, considérons une surface dont l'équation du degré m est

$$(5) \qquad M(x, y, z) = 0;$$

on aura les coordonnées x des points de contact des plans tangents parallèles à un plan donné, en éliminant y, z entre les trois équations

$$(6) \qquad M = 0, \quad \frac{dM}{dy} + b\frac{dM}{dz} = 0, \quad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dz} = 0,$$

et désignons la résultante par

$$(7) \qquad \varphi(x) = 0.$$

M. Liouville a montré dans le Mémoire cité comment on pouvait cal-

---

[*] *Voir* le *Traité des Propriétés projectives des figures*, t. II, et les *Mathematische Werke* de Jacobi, t. II, p. 197.

culer les termes de cette équation dont le premier est du degré $m(m-1)^2$. Or, groupons dans M les termes de même degré et écrivons-le

$$M(x, y, z) = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots;$$

il faut, pour que sa méthode soit applicable, que l'on puisse tirer des deux premières équations (6), pour les porter dans la troisième, $m(m-1)$ systèmes de valeurs pour $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$ sous la forme

$$\frac{y}{x} = \alpha + \frac{\alpha'}{x} + \frac{\alpha''}{x^2} + \ldots, \quad \frac{z}{x} = \beta + \frac{\beta'}{x} + \ldots;$$

ce qui sera possible, toutes les fois que l'on pourra tirer $m(m-1)$ systèmes de valeurs convenables pour α, β, α', β' au moyen des équations (*loc. cit.*, p. 366) :

$$(a) \begin{cases} f(\alpha, \beta) = 0, \quad \dfrac{df}{d\alpha} + b\dfrac{df}{d\beta} = 0, \\ \dfrac{df}{d\alpha}\alpha' + \dfrac{df}{d\beta}\beta' + f_1 = 0, \\ \left(\dfrac{d^2f}{d\alpha^2} + b\dfrac{d^2f}{d\alpha\, d\beta}\right)\alpha' + \left(\dfrac{d^2f}{d\alpha\, d\beta} + b\dfrac{d^2f}{d\beta^2}\right)\beta' + \dfrac{df_1}{d\alpha} + b\dfrac{df_1}{d\beta} = 0. \end{cases}$$

Supposons cette méthode applicable : la surface n'aura ni ligne de striction, ni ligne de rebroussement, et si elle n'a non plus aucun point singulier dont les coordonnées satisfassent aux équations

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0, \quad \frac{dM}{dz} = 0,$$

la résultante (7) ne donnera que les abscisses des points de contact de $m(m-1)^2$ plans tangents parallèles à un plan donné.

Revenons maintenant à notre question. D'après le raisonnement que nous avons donné à la page 61 de ce volume, il *suffit* de prouver que la surface dont l'équation est

$$(8) \qquad F(u, v, w, s) = 0,$$

$\frac{u}{s}, \frac{v}{s}, \frac{w}{s}$ désignant les coordonnées, a bien en général $6 \times 5^2 = 150$ plans tangents parallèles à un plan donné. Comme il est évident que, si cette proposition est vraie dans un cas particulier, elle aura lieu à plus forte raison dans le cas général, faisons, à la page 57,

$$a = b = c = d = e = f = 0,$$

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = f_1 = g_2 = g_3 = h_1 = h_3 = k_1 = k_2 = 0;$$

alors les expressions de L_1, M_2, $P_3, \ldots$, M_1 se réduisent à

$$L_1 = M_2 = P_3 = 0,$$

$$P_2 = (kw + hv)\,u, \quad P_1 = (gu + kw)\,v, \quad M_1 = (hv + gu)\,w,$$

l'équation (8) devient

$$F = 2MP_1P_2 + (M_1^2 + P_2^2 + P_1^2)\,s^2 - s^6 = 0,$$

et l'expression résultant de la somme des termes du plus haut degré qui s'y trouvent est

$$2uvw\,(kw + hv)\,(gu + hw)\,(hv + gu).$$

La méthode citée pour arriver à l'équation (7) n'est pas immédiatement applicable, parce que la dernière expression renferme un facteur qui ne contient ni v ni w. Mais faisons une transformation de coordonnées en posant

$$u = \frac{u' + v'}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{u' - v'}{\sqrt{2}},$$

cette expression devient

$$(u' - v'^2)\,w\left[\frac{h}{\sqrt{2}}(u' - v') + kw\right]\left[\frac{g}{\sqrt{2}}(u' + v') + hw\right]$$

$$\times\left[\frac{h + g}{\sqrt{2}}\,u' + \frac{g - h}{\sqrt{2}}\,v'\right],$$

la fonction $f(\alpha, \beta)$ des équations (a) a pour expression

$$f(\alpha, \beta) = (1-\alpha)(1+\alpha)\beta\left(\frac{h}{\sqrt{2}} - \frac{h}{\sqrt{2}}\alpha + k\beta\right)\left(\frac{g}{\sqrt{2}} + \frac{g}{\sqrt{2}}\alpha + h\beta\right)$$
$$\times\left(\frac{h+g}{\sqrt{2}} + \frac{g-h}{\sqrt{2}}\alpha\right),$$

et il est aisé de voir que les équations (a) permettront d'obtenir pour $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ $m(m-1)$ systèmes de solutions finies et déterminées.

Ceci admis, nous n'avons plus besoin que de prouver que l'on ne peut satisfaire à la fois aux quatre équations

$$F = 0, \quad \frac{dF}{du} = 0, \quad \frac{dF}{dv} = 0, \quad \frac{dF}{dw} = 0,$$

dont les trois dernières peuvent s'écrire

$$(b)\quad \begin{cases} (P_2 s^2 + M_1 P_1)\dfrac{dP_2}{du} + (P_1 s^2 + M_1 P_2)\dfrac{dP_1}{du} + (M_1 s^2 + P_1 P_2)\dfrac{dM_1}{du} = 0, \\ (P_2 s^2 + M_1 P_1)\dfrac{dP_2}{dv} + (P_1 s^2 + M_1 P_2)\dfrac{dP_1}{dv} + (M_1 s^2 + P_1 P_2)\dfrac{dM_1}{dv} = 0, \\ (P_2 s^2 + M_1 P_1)\dfrac{dP_2}{dw} + (P_1 s^2 + M_1 P_2)\dfrac{dP_1}{dw} + (M_1 s^2 + P_1 P_2)\dfrac{dM_1}{dw} = 0. \end{cases}$$

En les multipliant respectivement par u, v, w et les ajoutant, nous obtenons

$$(M_1^2 + P_2^2 + P_1^2)s^2 = -3M_1 P_1 P_2,$$

et, en remplaçant le premier membre par le second dans $F = 0$, nous avons

$$(9)\qquad M_1 P_1 P_2 + s^6 = 0.$$

Enfin, des équations (b) on tire

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dP_2}{du} & \dfrac{dP_1}{du} & \dfrac{dM_1}{du} \\ \dfrac{dP_2}{dv} & \dfrac{dP_1}{dv} & \dfrac{dM_1}{dv} \\ \dfrac{dP_2}{dw} & \dfrac{dP_1}{dw} & \dfrac{dM_1}{dw} \end{vmatrix} = 0;$$

remplaçant les dérivées par leurs valeurs

$$\frac{dP_2}{du} = kw + hv, \quad \frac{dP_2}{dv} = hu, \quad \frac{dP_2}{dw} = ku,$$
$$\frac{dP_1}{du} = gv, \quad \frac{dP_1}{dv} = kw + gu, \quad \frac{dP_1}{dw} = kv,$$
$$\frac{dM_1}{du} = gw, \quad \frac{dM_1}{dv} = hw, \quad \frac{dM_1}{dw} = hv + gu,$$

et faisant les réductions, on a

$$4ghkuvw = 0.$$

On devrait donc avoir $u = 0$, ou $v = 0$, ou $w = 0$. Soit par exemple $u = 0$, P_2 serait nul et l'équation (9) impossible, et il en est de même si l'on suppose $v = 0$ ou $w = 0$. Notre proposition est donc démontrée.

Pour prouver que la courbe qui est donnée par l'équation (c) de la page 67 a sa réciproque du douzième degré, il suffit de considérer le cas où l'on a $A = -\alpha$, $C = -\alpha$; alors l'équation se réduit à

$$-\alpha^2 u^4 - \alpha^2 w^4 + (\alpha^2 - B^2 + 2B\alpha) u^2 w^2 + s^4 = 0,$$

et, par la raison qu'elle ne renferme plus que des termes du quatrième degré et un terme constant, elle ne peut avoir de points doubles. D'ailleurs l'ensemble des termes du plus haut degré

$$-\alpha^2 u^4 - \alpha^2 w^4 + (\alpha^2 - B^2 + 2B\alpha) u^2 w^2$$

ne renferme pas de facteur multiple; donc la polaire réciproque est en effet du douzième degré, d'après ce que nous avons dit en commençant.

Il serait encore aisé de prouver que la surface de l'onde possède en général une ligne de rebroussement correspondante à une ligne d'inflexion de la surface (8) et une ligne de striction.

Dans le même Mémoire, nous avons fait remarquer que, si une surface n'a qu'un certain nombre de plans tangents parallèles à un plan

donné, il ne s'ensuit pas que par une droite on ne peut lui mener que ce même nombre de plans tangents, et cela est vrai; mais nous avons eu le tort d'en conclure que l'on doit pouvoir mener à la surface de l'onde plus de six plans tangents par une droite donnée; on ne peut lui en mener que six, et cela résulte uniquement de ce que sa surface réciproque est du sixième degré.

Considérons une surface algébrique quelconque; menons le cône circonscrit d'un point arbitraire pris pour sommet; en ce point élevons le cône normal, c'est-à-dire le cône formé par les droites normales à tous les plans tangents du premier cône; le degré du cône normal indique le nombre des plans tangents que l'on peut mener à la surface par une droite quelconque. Lorsque cette surface est du degré m et a sa réciproque du degré $m(m-1)^2$, ce qui est le cas de la surface (8), son cône circonscrit est du degré $m(m-1)$ et le cône normal du degré $m(m-1)^2$; quant à la surface réciproque, elle a un cône circonscrit du degré $m(m-1)$, dont le cône normal est du degré m.

MÉMOIRE

SUR

LA RÉFLEXION ET LA RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE;

PAR M. CHARLES **BRIOT**.

I.

1. La méthode qu'a suivie Fresnel pour traiter le problème de la réflexion et de la réfraction de la lumière a été l'objet de nombreuses controverses. Cette méthode repose sur deux principes : le principe des forces vives et celui de continuité. Le premier consiste en ce que la force vive ou l'intensité de l'onde incidente est égale à la somme des intensités de l'onde réfléchie et de l'onde réfractée. Pour l'appliquer, Fresnel suppose que la densité de l'éther qui pénètre les corps transparents est plus grande que la densité de l'éther libre, et que la vitesse de propagation de la lumière varie en raison inverse de la racine carrée de cette densité. Le principe de continuité signifie que l'état vibratoire de l'éther n'éprouve pas de changement brusque quand on passe du premier milieu au second, et qu'à une distance infiniment petite de part et d'autre de la surface de séparation, le mouvement vibratoire est le même dans les deux milieux.

Toutefois Fresnel n'établit cette concordance des vibrations que pour la composante parallèle à la surface de séparation ; cette condition, jointe à l'équation des forces vives, suffit pour déterminer complétement le rayon réfléchi et le rayon réfracté. Mais alors l'accord n'a pas lieu entre les composantes perpendiculaires à la surface de séparation, et Fresnel est forcé d'admettre que cette composante varie brusquement d'un côté à l'autre de la surface.

2. C'est là un grave défaut dans la théorie de Fresnel. Mac-Cullagh

et M. Neumann ont imaginé une autre méthode qui conduit aux mêmes formules, et qui offre l'avantage d'établir la concordance parfaite des vibrations, aussi bien pour la composante perpendiculaire que pour la composante parallèle à la surface de séparation des deux milieux. Mais alors il faut admettre que la direction de la vibration dans la lumière polarisée est, non pas perpendiculaire au plan de polarisation comme le supposait Fresnel, mais située dans ce plan; il faut admettre, en outre, que dans les corps pondérables la densité de l'éther est la même que dans le vide. Cette dernière hypothèse est contredite par les expériences de M. Fizeau, qui démontrent d'une manière formelle que la densité de l'éther est plus grande dans les corps pondérables que dans le vide, et que, lorsque le corps se meut, il emporte avec lui l'excès d'éther qu'il contient.

3. Il faut donc revenir aux idées de Fresnel. Il m'a semblé que l'on pouvait faire disparaître l'imperfection que présente sa méthode, et établir la concordance parfaite des vibrations, en tenant compte de tous les mouvements vibratoires qui existent dans l'éther, soit que ces mouvements se propagent loin de la surface de séparation, soit qu'ils restent concentrés dans le voisinage de cette surface, de manière à devenir insensibles à une petite distance de ce plan. La méthode que j'emploie est basée sur une extension du principe de continuité, dont la première idée se trouve dans les travaux de Cauchy. Voici en quoi consiste cette extension. Supposons que la surface de séparation soit plane; prenons pour origine des coordonnées un point O du plan de séparation; pour axe des x une perpendiculaire à ce plan, et pour axe des y et des z deux droites rectangulaires situées dans ce plan. Appelons x, y, z les coordonnées d'une molécule d'éther de l'un ou l'autre milieu dans l'état d'équilibre; $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ les coordonnées de cette même molécule pendant le mouvement. Admettons que le mouvement vibratoire dans l'un et l'autre milieu soit représenté par une somme de mouvements simples, tels que

$$\xi = A e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\eta = B e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\zeta = C e^{ux+vy+wz-st},$$

caractérisés chacun par une exponentielle de la forme [*]

$$e^{ux+vy+wz-st}.$$

On exprimera l'accord des vibrations de part et d'autre du plan en écrivant que pour $x=0$ les valeurs de ξ, η, ζ dans l'un et l'autre milieu sont respectivement égales; ces relations devant être satisfaites pour tous les points du plan et à un instant quelconque, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs de y, z, t, il faudra que tous les termes contiennent la même exponentielle $e^{vy+wz-st}$. Les exponentielles caractéristiques des différents mouvements simples coexistants ne pourront donc différer que par la valeur de la constante u. De là résultent, ainsi que l'a remarqué Cauchy, les lois géométriques de la réflexion et de la réfraction, savoir, que les normales aux plans des ondes planes coexistantes sont situées dans un même plan perpendiculaire au plan de séparation, et que les sinus des angles que font ces normales avec la perpendiculaire au plan de séparation sont proportionnels à leurs vitesses de propagation.

4. Je rappelle ici en quelques mots la démonstration de Cauchy. Supposons que les constantes u, v, w, s soient de la forme

$$u = \mathrm{u}i,\quad v = \mathrm{v}i,\quad w = \mathrm{w}i,\quad s = \mathrm{s}i,$$

la lettre i désignant le signe $\sqrt{-1}$, et posons

$$\mathrm{A} = \mathrm{a}e^{\delta i},\quad \mathrm{B} = \mathrm{b}e^{\delta' i},\quad \mathrm{C} = \mathrm{c}e^{\delta'' i};$$

les parties réelles et les parties imaginaires des intégrales simples vérifiant séparément les équations différentielles, ces parties réelles

$$\begin{aligned}
\xi &= \mathrm{a}\cos(\mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z - \mathrm{s}t + \delta),\\
\eta &= \mathrm{b}\cos(\mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z - \mathrm{s}t + \delta'),\\
\zeta &= \mathrm{c}\cos(\mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z - \mathrm{s}t + \delta'')
\end{aligned}$$

---

[*] *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, par Cauchy; t. I, p. 7. — *Essais sur la Théorie mathématique de la lumière*, par C. Briot; p. 4.

représentent un mouvement vibratoire se propageant par ondes planes parallèles au plan

$$ux + vy + wz = 0.$$

La durée de la vibration est $T = \frac{2\pi}{s}$. Si l'on pose $k = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, la longueur de l'onde est $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, et la vitesse de propagation $\omega = \frac{\lambda}{T} = \frac{s}{k}$. Prenons pour plan des xy un plan perpendiculaire à l'onde incidente, nous aurons $w = 0$ pour l'onde incidente, et par conséquent pour toutes les ondes coexistantes; les normales à toutes ces ondes sont donc situées dans le plan xoy, c'est-à-dire dans un même plan perpendiculaire au plan de séparation. La constante v est aussi la même pour toutes les ondes. Si l'on appelle α, α', α'',... les angles que font ces normales avec l'axe ox; k, k', k'',..., ω, ω', ω'',... les valeurs correspondantes de k et ω, on a

$$v = k \sin\alpha = k' \sin\alpha' = k'' \sin\alpha'' = \ldots,$$

d'où

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{k'}{k} = \frac{\omega}{\omega'}, \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''} = \frac{\omega}{\omega''}, \ldots.$$

5. J'arrive maintenant au principe de continuité. Remarquons que les équations du mouvement vibratoire, quand on néglige la dispersion, sont des équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du second ordre des trois fonctions ξ, η, ζ des quatre variables indépendantes x, y, z, t [*].

Si l'on pose

$$\xi = \xi_1 e^{vy + wz - st}, \quad \eta = \eta_1 e^{vy + wz - st}, \quad \zeta = \zeta_1 e^{vy + wz - st},$$

ξ_1, η_1, ζ_1 étant des fonctions de la seule variable x, ces équations se réduisent à des équations linéaires entre ξ_1, η_1, ζ_1, $\frac{d\xi_1}{dx}$, $\frac{d\eta_1}{dx}$, $\frac{d\zeta_1}{dx}$, $\frac{d^2\xi_1}{dx^2}$, $\frac{d^2\eta_1}{dx^2}$, $\frac{d^2\xi_1}{dx^2}$. On peut les remplacer par un système de six équations

[*] *Essais*, p. 10.

du premier ordre de la forme

$$\frac{d\xi_1}{dx} = \xi'_1, \quad \frac{d\eta_1}{dx} = \eta'_1, \quad \frac{d\zeta_1}{dx} = \zeta'_1,$$

$$\frac{d\xi'_1}{dx} = \mathcal{L}\,\xi_1 + \mathfrak{M}\,\eta_1 + \mathfrak{N}\,\zeta_1 + \mathfrak{P}\,\xi'_1 + \mathfrak{Q}\,\eta'_1 + \mathfrak{R}\,\zeta'_1,$$

$$\frac{d\eta'_1}{dx} = \mathcal{L}'\xi_1 + \mathfrak{M}'\eta_1 + \mathfrak{N}'\zeta_1 + \mathfrak{P}'\xi'_1 + \mathfrak{Q}'\eta'_1 + \mathfrak{R}'\zeta'_1.$$

$$\frac{d\zeta'_1}{dx} = \mathcal{L}''\xi_1 + \mathfrak{M}''\eta_1 + \mathfrak{N}''\zeta_1 + \mathfrak{P}''\xi'_1 + \mathfrak{Q}''\eta'_1 + \mathfrak{R}''\zeta'_1.$$

Les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$,... sont des constantes dans l'un et l'autre milieu; mais ils changent rapidement, tout en conservant des valeurs finies, quand on passe d'un milieu à l'autre, c'est-à-dire quand x varie de $-x'$ à $+x'$, x' étant une quantité très-petite. Si l'on admet que ξ_1, η_1, ζ_1, ξ'_1, η'_1, ζ'_1 conservent des valeurs finies dans le voisinage du plan de séparation [*], les trois dernières équations montrent que $\frac{d\xi'_1}{dx}$, $\frac{d\eta'_1}{dx}$, $\frac{d\zeta'_1}{dx}$ conservent aussi des valeurs finies quand x varie de $-x'$ à $+x'$, tout en éprouvant des changements rapides; il en résulte que leurs intégrales ξ'_1, η'_1, ζ'_1 n'éprouvent que des variations très-petites; il en est de même à plus forte raison de ξ_1, η_1, ζ_1 en vertu des trois premières équations. Ainsi, non-seulement les composantes ξ, η, ζ du mouvement vibratoire dans l'un et l'autre milieu doivent être respectivement égales pour $x = 0$, mais encore leurs dérivées premières $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dx}$ par rapport à la coordonnée x perpendiculaire au plan de séparation. Il en résulte six équations de condition qui suffisent pour traiter le problème de la réflexion et de la réfraction à la surface de séparation de deux milieux quelconques, monoréfringents ou biréfringents.

---

[*] Il est évident, d'après la nature des choses, que ξ, η, ζ ou ξ_1, η_1, ζ_1 conservent des valeurs finies dans le voisinage du plan de séparation. Si les quantités ξ'_1, η'_1, ζ'_1 devenaient très-grandes, leurs dérivées $\frac{d\xi'_1}{dx}$, $\frac{d\eta'_1}{dx}$, $\frac{d\zeta'_1}{dx}$ seraient des quantités très-grandes d'un ordre supérieur; ce qui n'a pas lieu, en vertu des trois dernières équations, puisque les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}$,... ont des valeurs finies.

II.

6. Nous allons appliquer cette méthode d'abord au cas de deux milieux isotropes séparés par une surface plane. Mais auparavant nous rappellerons les principales propriétés des vibrations dans un semblable milieu.

Les équations différentielles du mouvement vibratoire dans un milieu isotrope, quand on néglige la dispersion, sont de la forme [*]

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\xi}{dt^2}-(g+h)\left(\frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{d^2\xi}{dy^2}+\frac{d^2\xi}{dz^2}\right)-2h\frac{d\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)}{dx}=0,\\
&\frac{d^2\eta}{dt^2}-(g+h)\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{d^2\eta}{dy^2}+\frac{d^2\eta}{dz^2}\right)-2h\frac{d\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)}{dy}=0,\\
&\frac{d^2\zeta}{dt^2}-(g+h)\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}+\frac{d^2\zeta}{dy^2}+\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right)-2h\frac{d\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)}{dz}=0,
\end{aligned}\right.$$

g et h étant deux constantes qui dépendent de la densité du milieu et de la loi des forces moléculaires.

Les constantes qui entrent dans l'expression d'une intégrale simple

$$\xi=\mathrm{A}e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\eta=\mathrm{B}e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\zeta=\mathrm{C}e^{ux+vy+wz-st},$$

doivent être assujetties à vérifier les relations

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&[s^2-(g+h)(u^2+v^2+w^2)]\mathrm{A}-2hu(u\mathrm{A}+v\mathrm{B}+w\mathrm{C})=0,\\
&[s^2-(g+h)(u^2+v^2+w^2)]\mathrm{B}-2hv(u\mathrm{A}+v\mathrm{B}+w\mathrm{C})=0,\\
&[s^2-(g+h)(u^2+v^2+w^2)]\mathrm{C}-2hw(u\mathrm{A}+v\mathrm{B}+w\mathrm{C})=0.
\end{aligned}\right.$$

On en déduit

$$(3)\quad [s^2-(g+3h)(u^2+v^2+w^2)](u\mathrm{A}+v\mathrm{B}+w\mathrm{C})=0.$$

---

[*] *Exercices*, t. I, p. 115. — *Essais*, p. 43.

Ces équations peuvent être vérifiées de deux manières : on doit avoir

$$(4)\qquad s^2 = (g + 3h)(u^2 + v^2 + w^2),\quad \frac{A}{u} = \frac{B}{v} = \frac{C}{w},$$

ou bien

$$(5)\qquad uA + vB + wC = 0,\quad s^2 = (g + h)(u^2 + v^2 + w^2).$$

Le premier mode donne les vibrations longitudinales, le second les vibrations transversales.

Supposons, en effet, que les constantes u, v, w, s soient de la forme $\mathrm{u}i$, $\mathrm{v}i$, $\mathrm{w}i$, $\mathrm{s}i$; par le premier mode, on a

$$\delta = \delta' = \delta'',\qquad \frac{\xi}{\mathrm{u}} = \frac{\eta}{\mathrm{v}} = \frac{\zeta}{\mathrm{w}},\qquad \omega^2 = g + 3h;$$

la vibration est rectiligne et perpendiculaire au plan de l'onde; c'est une vibration longitudinale. Par le second mode, on a

$$\omega^2 = g + h,\quad \mathrm{u}\xi + \mathrm{v}\eta + \mathrm{w}\zeta = 0;$$

la vibration est située dans le plan de l'onde ; c'est une vibration transversale; deux des coefficients A, B, C restant arbitraires, la courbe décrite par chaque molécule d'éther pendant son mouvement est une ellipse quelconque dans le plan de l'onde.

7. Prenons l'axe ox dans le second milieu, et supposons le plan xoy perpendiculaire à l'onde plane incidente; cette onde plane a pour exponentielle caractéristique une exponentielle de la forme $e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}$, dans laquelle u, v, s sont des quantités positives. Dans les exponentielles relatives aux mouvements simples coexistants, il faudra faire $v = \mathrm{v}i$, $\mathrm{w} = 0$, $s = \mathrm{s}i$. En vertu de ce qui précède, à un même système de valeurs de v, w, s correspondent dans le premier milieu quatre valeurs de u, données par les équations (4) et (5),

$$(6)\qquad u = \pm\sqrt{\mathrm{v}^2 - \frac{\mathrm{s}^3}{g + 3h}},\quad \frac{A}{u} = \frac{B}{\mathrm{v}i},\quad C = 0,$$

$$(7)\qquad u = \pm\sqrt{\mathrm{v}^2 - \frac{\mathrm{s}^2}{g + h}},\qquad Au + B\mathrm{v}i = 0.$$

Nous supposons que l'onde incidente est une onde transversale; cette vibration satisfait à l'équation (7) qui se réduit à $u = \pm \mathrm{u} i$; la solution $u = \mathrm{u} i$ reproduit l'onde incidente qui se rapproche de la surface de séparation; la solution $u = -\mathrm{u} i$ donne une onde transversale réfléchie qui s'éloigne de cette surface. Si les valeurs de u fournies par l'équation (6) sont imaginaires et de la forme $\pm \mathrm{u}_1 i$, elles donneront deux ondes longitudinales, l'une se rapprochant du plan de séparation, l'autre s'en éloignant. La seconde solution $u = -u_1 i$ est seule admissible; car, en vertu de l'ébranlement communiqué par l'onde incidente à la surface de séparation, il ne peut se produire évidemment dans l'un et l'autre milieu que des ondes qui se propagent en s'éloignant de cette surface. Si ces valeurs de u sont réelles, on a deux exponentielles de la forme $e^{\mathrm{U}_1 x + (\mathrm{v}y - \mathrm{s}t)i}$, ou $e^{-\mathrm{U}_1 x + (\mathrm{v}y - \mathrm{s}t)i}$. A la première correspond la vibration

$$\xi = a e^{\mathrm{U}_1 x} \cos(\mathrm{v}y - \mathrm{s}t + \delta), \quad \eta = a \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{U}_1} e^{\mathrm{U}_1 x} \cos\left(\mathrm{v}y - \mathrm{s}t + \delta + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\zeta = 0,$$

parallèle au plan d'incidence et de forme elliptique; elle se propage par ondes planes parallèles au plan $y = 0$, avec une vitesse égale à $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{v}}$ ou $\frac{\omega}{\sin\alpha}$ dans le sens oy; c'est la vitesse même avec laquelle l'onde incidente communique l'ébranlement au plan de séparation. Mais, à cause de l'exponentielle $e^{\mathrm{U}_1 x}$, puisque la coordonnée x est négative dans le premier milieu, l'amplitude de la vibration diminue à mesure qu'on s'éloigne du plan de séparation; cette vibration reste donc concentrée dans le voisinage de ce plan.

L'autre exponentielle donnerait au contraire une vibration dont l'amplitude croîtrait indéfiniment à mesure qu'on s'éloigne du plan de séparation; cette solution n'est pas admissible.

Ainsi, dans tous les cas, trois vibrations peuvent coexister dans le premier milieu : la vibration transversale incidente, la vibration transversale réfléchie, et une troisième vibration qui se propage loin de la surface de séparation sous forme de vibration longitudinale, ou qui

reste concentrée dans le voisinage de cette surface sous forme elliptique. Nous dirons avec Cauchy que la vibration est persistante dans le premier cas, évanescente dans le second cas. De sorte que l'état vibratoire du premier milieu est représenté par les formules

$$(8)\quad \begin{cases} \xi = \mathrm{A}e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{A}_1 e^{(-\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + ae^{(-\mathrm{u}_1x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \\ \eta = \mathrm{B}e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{B}_1 e^{(-\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + be^{(-\mathrm{u}_1x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \\ \zeta = \mathrm{C}e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{C}_1 e^{(-\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \end{cases}$$

auxquelles on joindra les relations

$$(9)\qquad \mathrm{Au} + \mathrm{Bv} = 0, \quad -\mathrm{A}_1\mathrm{u} + \mathrm{B}_1\mathrm{v} = 0, \quad \frac{a}{-\mathrm{u}_1} = \frac{b}{\mathrm{v}},$$

et que l'on réduira à leurs parties réelles. Les premiers termes se rapportent à l'onde incidente, les deuxièmes à l'onde transversale réfléchie, les troisièmes à l'onde longitudinale réfléchie que l'on a supposée persistante; si elle était évanescente, il suffirait de remplacer u_1 par $\mathrm{U}_1 i$, U_1 étant une quantité positive.

8. Pour passer du premier milieu au second, il suffit, dans les équations (6) et (7), de remplacer les deux constantes g et h par g' et h'. Si les racines de l'équation (7) sont imaginaires et de la forme $u = \pm \mathrm{u}'i$, elles fourniront deux ondes transversales persistantes; on ne prendra que la solution $u = \mathrm{u}'i$ qui donne une onde s'éloignant de la surface de séparation; l'autre, se rapprochant, n'est pas admissible. Si ces racines sont réelles, on a deux exponentielles de la forme $e^{-\mathrm{U}'x+(\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}$, ou $e^{\mathrm{U}'x+(\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}$; à la première correspond une vibration

$$\begin{aligned} \xi &= \mathrm{a}e^{-\mathrm{U}'x}\cos(\mathrm{v}y - \mathrm{s}t + \delta), \\ \eta &= \mathrm{a}\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{v}}e^{-\mathrm{U}'x}\cos\left(\mathrm{v}y - \mathrm{s}t + \delta - \frac{\pi}{2}\right), \\ \zeta &= \mathrm{c}e^{-\mathrm{U}'x}\cos(\mathrm{v}y - \mathrm{s}t + \delta''), \end{aligned}$$

de forme elliptique, se propageant par ondes parallèles au plan $y = 0$, dans le sens oy, avec la même vitesse $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{v}}$ que dans le premier milieu; l'amplitude de la vibration diminue à mesure qu'on s'éloigne du plan

de séparation. L'autre exponentielle, donnant une vibration dont l'amplitude augmente indéfiniment à mesure qu'on s'éloigne de ce plan, doit être rejetée. Il en est de même des racines de l'équation (6). Ainsi, dans le second milieu, deux vibrations seulement pourront exister, l'une transversale, l'autre longitudinale, persistantes ou évanescentes. De sorte que l'état vibratoire du second milieu sera représenté par les formules

$$(10)\quad \begin{cases} \xi = \mathrm{A}' e^{(\mathrm{u}'x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + a' e^{(\mathrm{u}'_1 x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \\ \eta = \mathrm{B}' e^{(\mathrm{u}'x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + b' e^{(\mathrm{u}'_1 x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \\ \zeta = \mathrm{C}' e^{(\mathrm{u}'x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \end{cases}$$

auxquelles on joindra les relations

$$(11)\qquad \mathrm{A}'\mathrm{u}' + \mathrm{B}'\mathrm{v} = 0, \quad \frac{a'}{\mathrm{u}'_1} = \frac{b'}{\mathrm{v}},$$

et que l'on réduira encore à leurs parties réelles. Les premiers termes se rapportent à l'onde transversale réfractée, les seconds à l'onde longitudinale. On a supposé ces deux vibrations persistantes : si elles étaient évanescentes, il suffirait de remplacer u' et u'_1 par $\mathrm{U}'i$ et $\mathrm{U}'_1 i$, U' et U'_1 étant des quantités positives.

9. Posons

$$\omega^2 = g + h, \quad \omega'^2 = g' + h', \quad \omega_1^2 = g + 3h, \quad \omega_1'^2 = g' + 3h',$$
$$\mathrm{k} = \sqrt{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2},$$

et appelons α l'angle d'incidence, on a

$$\mathrm{v} = \mathrm{k}\sin\alpha, \quad \mathrm{s}^2 = \omega^2\mathrm{k}^2,$$

et les équations (6) et (7) donnent

$$(12)\quad \begin{cases} \mathrm{u}' = \mathrm{k}\sqrt{\dfrac{\omega^2}{\omega'^2} - \sin^2\alpha}, \\ \mathrm{u}_1 = \mathrm{k}\sqrt{\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2} - \sin^2\alpha}, \\ \mathrm{u}'_1 = \mathrm{k}\sqrt{\dfrac{\omega^2}{\omega_1'^2} - \sin^2\alpha}. \end{cases}$$

Les lettres ω et ω' représentent les vitesses de propagation des vibrations transversales dans les deux milieux, ω_1 et ω'_1 celles des vibrations longitudinales. Nous supposons les deux milieux transparents, c'est-à-dire les deux quantités ω^2 et ω'^2 positives. La vibration transversale réfractée sera persistante ou évanescente, suivant que $\sin\alpha$ sera plus petit ou plus grand que $\frac{\omega}{\omega'}$. Si les quantités ω_1^2 $\omega_1'^2$ sont négatives, les vibrations longitudinales seront toujours évanescentes; mais si ces quantités sont positives, elles seront persistantes ou évanescentes suivant la grandeur de l'angle d'incidence α.

III.

10. Pour avoir les conditions relatives à la surface de séparation, il faut, comme nous l'avons dit, égaler entre elles les valeurs auxquelles se réduisent pour $x = 0$ les composantes ξ, η, ζ du mouvement vibratoire considéré dans l'un et l'autre milieu, et égaler aussi leurs premières dérivées $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dx}$. On obtient ainsi les six équations de condition

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &A + A_1 + a = A' + a',\\ &B + B_1 + b = B' + b',\\ &C + C_1 = C',\\ &(A - A_1)\,u - a u_1 = A' u' + a' u'_1,\\ &(B - B_1)\,u - b u_1 = B' u' + b' u'_1,\\ &(C - C_1)\,u = C' u',\end{aligned}\right.$$

auxquelles il faut joindre les relations (9) et (11).

11. De la troisième et de la sixième des équations (13), on déduit immédiatement les deux formules

$$(14)\qquad C_1 = C\frac{u - u'}{u + u'},\quad C' = C\frac{2u}{u + u'};$$

qui suffisent pour résoudre la question, quand le rayon incident est polarisé en ligne droite et a sa vibration parallèle à oz.

Les quatre autres équations se rapportent au cas où le rayon incident est polarisé en ligne droite et a sa vibration située dans le plan

d'incidence. En remplaçant A, A_1, a, A', a' par leurs valeurs tirées des relations (9) et (11), on obtient les quatre équations

$$(15)\quad \begin{cases} (B - B_1)\frac{1}{u} + b\frac{u_1}{v^2} = B'\frac{1}{u'} - b'\frac{u'_1}{v^2}, \\ B + B_1 + b = B' + b', \\ B + B_1 - b\frac{u_1^2}{v^2} = B' - b'\frac{u_1'^2}{v^2}, \\ (B - B_1)u - bu_1 = B'u' + b'u'_1, \end{cases}$$

entre les quatre inconnues B_1, B', b, b'.

De la première et de la quatrième on déduit

$$B' = (B - B_1)\frac{u'(u^2 + v^2)}{u(u'^2 + v^2)};$$

de la seconde et de la troisième on déduit de même

$$b' = b\frac{u_1^2 + v^2}{u_1'^2 + v^2}.$$

En portant ces valeurs dans la quatrième équation, on a

$$b = (B - B_1)\frac{v^2(u^2 - u'^2)(u_1'^2 + v^2)}{u(u_1 + u'_1)(u'^2 + v^2)(u_1u'_1 + v^2)}.$$

En substituant les valeurs de B', b', b dans la seconde équation, on a enfin

$$B - B_1 = B\frac{2u(u'^2 + v^2)(u_1u'_1 + v^2)}{(u + u')[(uu' + v^2)(u_1u'_1 + v^2) + v^2(u - u')(u_1 - u'_1)]}.$$

On déduit de là les valeurs des inconnues

$$(16)\quad \begin{cases} B_1 = B\frac{u - u'}{u + u'} \times \frac{(uu' - v^2)(u_1u'_1 + v^2) + v^2(u + u')(u_1 - u'_1)}{(uu' + v^2)(u_1u'_1 + v^2) + v^2(u - u')(u_1 - u'_1)}, \\ B' = B\frac{2u'}{u + u'} \times \frac{(u^2 + v^2)(u_1u'_1 + v^2)}{(uu' + v^2)(u_1u'_1 + v^2) + v^2(u - u')(u_1 - u'_1)}, \\ b = B\frac{2(u - u')}{u_1 + u'_1} \times \frac{v^2(u_1'^2 + v^2)}{(uu' + v^2)(u_1u'_1 + v^2) + v^2(u - u')(u_1 - u'_1)}, \\ b' = B\frac{2(u - u')}{u_1 + u'_1} \times \frac{v^2(u_1^2 + v^2)}{(uu' + v^2)(u_1u'_1 + v^2) + v^2(u - u')(u_1 - u'_1)}. \end{cases}$$

IV.

12. Lorsque le rayon incident a sa vibration perpendiculaire au plan d'incidence, les vibrations longitudinales n'interviennent pas dans le phénomène; comme on a

$$\cot\alpha = \frac{u}{v}, \quad \cot\alpha' = \frac{u'}{v},$$

les formules (14) se mettent sous la forme

$$(17) \qquad C_1 = -C\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}, \quad C' = C\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}.$$

Ce sont les formules trouvées par Fresnel.

Mais lorsque le rayon incident a sa vibration située dans le plan d'incidence, il est nécessaire d'avoir égard aux vibrations longitudinales. Dans l'incertitude où l'on est encore en ce qui concerne leur existence, on doit examiner successivement les différents cas qui peuvent se présenter. Considérons d'abord le cas où les deux vibrations longitudinales sont persistantes ainsi que la vibration transversale réfractée, et appelons α_1 et α'_1 les angles aigus que font les normales à ces deux ondes avec la perpendiculaire au plan de séparation; on aura de même

$$\cot\alpha_1 = \frac{u_1}{v}, \quad \cot\alpha'_1 = \frac{u'_1}{v},$$

et les équations (16) deviennent

$$(18) \qquad \left\{\begin{aligned} B_1 &= -B\frac{\sin(\alpha-\alpha')\cos(\alpha+\alpha'+\alpha_1-\alpha'_1)}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha'-\alpha_1+\alpha'_1)}, \\ B' &= B\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha'\cos(\alpha_1-\alpha'_1)}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha'-\alpha_1+\alpha'_1)}, \\ b &= -B\frac{2\sin^2\alpha_1\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos(\alpha-\alpha'-\alpha_1+\alpha'_1)}, \\ b' &= -B\frac{2\sin^2\alpha'_1\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos(\alpha-\alpha'-\alpha_1+\alpha'_1)}. \end{aligned}\right.$$

Comme on a

$$v = k\sin\alpha = k'\sin\alpha' = k_1\sin\alpha_1 = k'_1\sin\alpha'_1,$$

on en déduit

$$\frac{\sin\alpha}{\omega} = \frac{\sin\alpha'}{\omega'} = \frac{\sin\alpha_1}{\omega_1} = \frac{\sin\alpha'_1}{\omega'_1}.$$

Le cas que nous examinons se présentera si, les quantités ω_1^2 et $\omega_1'^2$ étant positives, $\sin\alpha$ est plus petit que chacun des trois rapports $\frac{\omega}{\omega'}$, $\frac{\omega}{\omega_1}$, $\frac{\omega}{\omega'_1}$.

13. Étudions en particulier le rayon transversal réfléchi et le rayon transversal réfracté, et supposons que le rayon incident ait sa vibration située dans le plan d'incidence. Il en sera de même du rayon réfléchi et du rayon réfracté. Appelons $o\varphi$, $o\varphi_1$, $o\varphi'$ des perpendiculaires à ces rayons dans le plan d'incidence, et faisant avec oy des angles aigus. Les vibrations des trois rayons transversaux pourront être représentées par

$$\begin{aligned}
\varphi &= \mathrm{D}\cos(\mathrm{u}x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t),\\
\varphi_1 &= \mathrm{D}_1\cos(-\mathrm{u}x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t),\\
\varphi' &= \mathrm{D}'\cos(\mathrm{u}'x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t),
\end{aligned}$$

D, D_1, D' étant des quantités positives ou négatives. On aura

$$\mathrm{B} = \mathrm{D}\cos\alpha, \quad \mathrm{B}_1 = \mathrm{D}_1\cos\alpha, \quad \mathrm{B}' = \mathrm{D}'\cos\alpha';$$

et par suite, en posant $\alpha_1 - \alpha'_1 = \varpi$,

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{D}_1 &= -\mathrm{D}\frac{\sin(\alpha-\alpha')\cos(\alpha+\alpha'+\varpi)}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha'-\varpi)};\\
\mathrm{D}' &= \mathrm{D}\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\varpi}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha'-\varpi)}.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules se réduiraient à celles de Fresnel si l'on avait $\varpi = 0$, ou $\alpha_1 = \alpha'_1$, c'est-à-dire si la vitesse de propagation des vibrations longitudinales était la même dans les deux milieux.

14. Supposons maintenant que le rayon incident soit polarisé dans un azimut quelconque. Nous pouvons décomposer cette vibration en

deux, l'une $\zeta = C\cos(ux + vy - st)$ dirigée suivant oz, l'autre $\varphi = D\cos(ux + vy - st)$ suivant $o\varphi$. Les formules (17) et (19) ne donnant pas de différence de phase, le rayon réfléchi et le rayon réfracté seront aussi polarisés en ligne droite. Appelons θ, θ_1, θ' les angles que font avec oz les trois vibrations, angles comptés de oz vers $o\varphi$, $o\varphi_1$, $o\varphi'$. On aura

$$\tang\theta = \frac{D}{C}, \quad \tang\theta_1 = \frac{D_1}{C_1}, \quad \tang\theta' = \frac{D'}{C'},$$

et par suite

$$(20) \quad \begin{cases} \tang\theta_1 = \tang\theta \times \dfrac{\cos(\alpha + \alpha' + \varpi)}{\cos(\alpha - \alpha' - \varpi)}, \\ \tang\theta' = \tang\theta \times \dfrac{\cos\varpi}{\cos(\alpha - \alpha' - \varpi)}. \end{cases}$$

Les formules (20) déterminent la direction de la vibration transversale réfléchie et celle de la vibration transversale réfractée. Les formules (17) donnent les amplitudes. Ces formules (20) sont susceptibles d'une interprétation géométrique analogue à celle qui a été remarquée il y a longtemps par Mac-Cullagh sur les formules de Fresnel, et qui a été le point de départ de ses propres recherches sur ce sujet. Si l'on appelle plan de vibration le plan mené par la normale au plan de l'onde et la direction de la vibration, les formules (20) signifient que les trois plans de vibration du rayon incident, du rayon réfléchi et du rayon réfracté se coupent suivant une même droite située dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence et faisant un angle égal à ϖ avec l'onde réfractée. Lorsque $\varpi = 0$, cette droite coïncide avec la direction de la vibration réfractée.

V.

15. Supposons maintenant que, le rayon transversal réfracté étant toujours persistant, les deux vibrations longitudinales soient évanescentes, ce qui aura lieu si les quantités ω_1^2 et $\omega_1'^2$ sont négatives, ou bien si, ces quantités étant positives, $\sin\alpha$ est plus grand que chacun des rapports $\frac{\omega}{\omega_1}$, $\frac{\omega}{\omega'_1}$, tout en étant plus petit que $\frac{\omega}{\omega'}$. Il suffira, comme

nous l'avons dit, de remplacer u_1 et u'_1 par $U_1 i$ et $U'_1 i$. Des relations (12) on déduit

$$\frac{U_1}{v} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2 \sin^2\alpha}}, \quad \frac{U'_1}{v} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1'^2 \sin^2\alpha}}.$$

Les formules (17) ne changent pas. Si, pour abréger, on pose

$$(21) \qquad \varepsilon = \frac{\frac{U_1}{v} - \frac{U'_1}{v}}{1 - \frac{U_1 U'_1}{v^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2 \sin^2\alpha}} - \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1'^2 \sin^2\alpha}}}{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2 \sin^2\alpha}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1'^2 \sin^2\alpha}\right)}},$$

les équations (16) deviennent

$$(22) \begin{cases} B_1 = -B\dfrac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} \times \dfrac{\cos(\alpha + \alpha') + i\varepsilon \sin(\alpha + \alpha')}{\cos(\alpha - \alpha') - i\varepsilon \sin(\alpha - \alpha')}, \\ B' = B\dfrac{2\sin\alpha'\cos\alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')} \times \dfrac{1}{\cos(\alpha - \alpha') - i\varepsilon\sin(\alpha - \alpha')}, \\ b = B\dfrac{1 - \dfrac{U_1'^2}{v^2}}{\left(\dfrac{U_1}{v} + \dfrac{U'_1}{v}\right)\left(1 - \dfrac{U_1}{v}\dfrac{U'_1}{v}\right)} \times \dfrac{2i\sin(\alpha - \alpha')}{\cos(\alpha - \alpha') - i\varepsilon\sin(\alpha - \alpha')}, \\ b' = B\dfrac{1 - \dfrac{U_1^2}{v^2}}{\left(\dfrac{U_1}{v} + \dfrac{U'_1}{v}\right)\left(1 - \dfrac{U_1}{v}\dfrac{U'_1}{v}\right)} \times \dfrac{2i\sin(\alpha - \alpha')}{\cos(\alpha - \alpha') - i\varepsilon\sin(\alpha - \alpha')}. \end{cases}$$

On en déduit, pour la vibration transversale réfléchie et la vibration transversale réfractée,

$$(23) \begin{cases} D_1 = -D\dfrac{\operatorname{tang}(\alpha - \alpha')}{\operatorname{tang}(\alpha + \alpha')} \times \dfrac{1 + i\varepsilon \operatorname{tang}(\alpha + \alpha')}{1 - i\varepsilon \operatorname{tang}(\alpha - \alpha')}, \\ D' = D\dfrac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin(\alpha + \alpha')\cos(\alpha - \alpha')} \times \dfrac{1}{1 - i\varepsilon\operatorname{tang}(\alpha - \alpha')}. \end{cases}$$

16. Ces formules se réduiraient aux formules de Fresnel, si la quantité ε était nulle. Mais si cette quantité n'est pas nulle, les deux rayons transversaux, l'un réfléchi, l'autre réfracté, qui proviennent d'un même rayon incident polarisé en ligne droite dans un azimut quelconque,

seront polarisés elliptiquement à cause de la différence de phase de leurs composantes. Soit $E\cos(ux + vy - st)$ la vibration incidente faisant avec oz l'angle θ compté de oz vers $o\varphi$; on a

$$C = E\cos\theta, \quad D = E\sin\theta.$$

Si l'on pose

$$(24) \qquad \operatorname{tang}\delta' = \varepsilon \operatorname{tang}(\alpha + \alpha'), \quad \operatorname{tang}\delta'' = \varepsilon \operatorname{tang}(\alpha - \alpha'),$$

les formules (23) deviennent

$$(25) \qquad \begin{cases} D_1 = -D\dfrac{\sin\delta''}{\sin\delta'}\, e^{(\delta'+\delta'')i}, \\ D' = D\dfrac{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\delta''}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha')}\, e^{\delta'' i}. \end{cases}$$

Si l'on fait $\delta = \delta' + \delta''$, la vibration transversale réfléchie a pour composantes les parties réelles des formules

$$\zeta = -E\cos\theta\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}\, e^{(-ux+vy-st)i},$$

$$\varphi_1 = -E\sin\theta\frac{\sin\delta''}{\sin\delta'}\, e^{(-ux+vy-st+\delta)i},$$

c'est-à-dire

$$(26) \qquad \begin{cases} \zeta = -E\cos\theta\dfrac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}\cos(-ux+vy-st), \\ \varphi_1 = -E\sin\theta\dfrac{\sin\delta''}{\sin\delta'}\cos(-ux+vy-st+\delta). \end{cases}$$

De même la vibration transversale réfractée a pour composantes

$$(27) \qquad \begin{cases} \zeta = E\cos\theta\dfrac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}\cos(u'x+vy-st), \\ \varphi' = E\sin\theta\dfrac{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\delta''}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha')}\cos(u'x+vy-st+\delta''). \end{cases}$$

La différence de phase est $\delta = \delta' + \delta''$ pour le rayon réfléchi, δ'' pour le rayon réfracté.

17. Nous avons à étudier des vibrations de la forme

$$\zeta = \mathrm{P}\cos.st, \quad \varphi = \mathrm{Q}\cos(st - \delta).$$

L'élimination de t donne l'ellipse

$$\frac{\zeta^2}{\mathrm{P}^2} + \frac{\varphi^2}{\mathrm{Q}^2} - 2\frac{\zeta}{\mathrm{P}}\frac{\varphi}{\mathrm{Q}}\cos\delta = \sin^2\delta.$$

Les angles θ_1 que font les axes de l'ellipse avec oz, angles comptés de oz vers $o\varphi$, seront donnés par la formule

$$\operatorname{tang} 2\theta_1 = \frac{2\mathrm{PQ}}{\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2} \times \cos\delta.$$

Si l'on pose

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}},$$

on a

$$\operatorname{tang} 2\theta_1 = \operatorname{tang} 2\Theta \times \cos\delta.$$

On peut reconnaître le sens du mouvement sur l'ellipse, à l'aide de la loi des aires,

$$\zeta\frac{d\varphi}{dt} - \varphi\frac{d\zeta}{dt} = \mathrm{PQ}s.\sin\delta = \pm abs,$$

a et b étant les longueurs des demi-axes.

L'ellipse sera décrite de oz vers $o\varphi$ ou en sens inverse, suivant que la quantité PQ sin δ sera positive ou négative.

18. Pour le rayon réfléchi, on a

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang}\Theta = \operatorname{tang}\theta \times \frac{\sin(\alpha+\alpha')\sin\delta''}{\sin(\alpha-\alpha')\sin\delta'}, \quad \operatorname{tang}2\theta_1 = \operatorname{tang}2\Theta \times \cos\delta, \\ &\pm ab = \varepsilon \mathrm{E}^2 \sin\theta\cos\theta \frac{\sin 2\alpha \operatorname{tang}^2(\alpha-\alpha')\cos^2\delta''}{\sin^2(\alpha+\alpha')}; \end{aligned}\right.$$

pour le rayon réfracté,

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang}\Theta = \operatorname{tang}\theta \times \frac{\cos\delta''}{\cos(\alpha-\alpha')}, \quad \operatorname{tang}2\theta_1 = \operatorname{tang}2\Theta \times \cos\delta'', \\ &\pm ab = \varepsilon \mathrm{E}^2 \sin\theta\cos\theta \frac{4\sin^2\alpha'\cos^2\alpha\cos^2\delta''\sin(\alpha-\alpha')}{\sin^2(\alpha+\alpha')\cos^2(\alpha-\alpha')}. \end{aligned}\right.$$

Ces ellipses se réduisent à des lignes droites pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$; le sens du mouvement sur chacune d'elles change quand θ passe par ces valeurs o ou $\frac{\pi}{2}$; il dépend aussi du signe de ε. Si $\omega > \omega'$, les deux ellipses sont décrites dans le même sens; mais, pour deux observateurs placés sur le rayon réfléchi et sur le rayon réfracté, de manière que le rayon entre par les pieds et sorte par la tête, les mouvements vibratoires paraîtront s'effectuer en sens contraires.

19. Les formules de Fresnel étant très-approchées, il est probable que le coefficient d'ellipticité ε a une valeur absolue très-petite; c'est ce qui aura lieu si la vitesse de propagation des vibrations longitudinales est à peu près la même dans les deux milieux. Si l'on néglige le carré de ε, les formules (25) se réduisent à

$$(30) \quad \begin{cases} D_1 = -D\dfrac{\operatorname{tang}(\alpha-\alpha')}{\operatorname{tang}(\alpha+\alpha')}e^{\delta i}, \\ D' = D\dfrac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha')}e^{\delta'' i}; \end{cases}$$

ce sont les formules de Fresnel, à part la différence de phase.

Outre ces deux ondes planes transversales qui se propagent en s'éloignant du plan de séparation, il existe, comme nous l'avons dit, dans le voisinage de ce plan, et de part et d'autre, des vibrations elliptiques qui se propagent parallèlement au plan. Quoiqu'elles deviennent insensibles à une petite distance, elles ne jouent pas moins un rôle essentiel dans la transformation du mouvement.

Les formules (23) sont les mêmes que celles qui ont été données par Cauchy (*Exercices*, t. Ier, p. 176) et vérifiées par M. Jamin dans les circonstances les plus favorables à la manifestation de la polarisation elliptique.

VI.

20. Examinons enfin le cas où la vibration transversale réfractée devient évanescente ainsi que les deux vibrations longitudinales.

Il faut remplacer u' par $U'i$,

$$\frac{U'}{v} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2\sin^2\alpha}},$$

et l'on a

$$\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}\,\frac{\mathrm{u} - \mathrm{U}'i}{\mathrm{u} + \mathrm{U}'i},$$

$$\mathrm{B}_1 = -\,\mathrm{B}\,\frac{\mathrm{u} - \mathrm{U}'i}{\mathrm{u} + \mathrm{U}'i}\,\frac{\left(1 + \varepsilon\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{v}}\right) - i\,\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}\left(\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{v}} + \varepsilon\right)}{\left(1 + \varepsilon\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{v}}\right) + i\,\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}\left(\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{v}} + \varepsilon\right)},$$

ε ayant toujours la valeur (21). Si l'on pose

$$\operatorname{tang}\delta' = \frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{u}} = \operatorname{tang}\alpha\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2\sin^2\alpha}},$$

$$\operatorname{tang}\delta'' = \cot\alpha\,\frac{\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{v}} + \varepsilon}{1 + \varepsilon\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{v}}},$$

il vient

$$\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}e^{-2\delta' i},$$

$$\mathrm{B}_1 = -\,\mathrm{B}e^{-2(\delta' + \delta'')i}.$$

Si le rayon incident est polarisé en ligne droite dans l'azimut θ, la vibration transversale réfléchie est polarisée elliptiquement et a pour composantes,

$$(31)\quad \begin{cases} \zeta = \mathrm{E}\cos\theta\cos(-\,\mathrm{u}x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t - 2\delta'),\\ \varphi_1 = \mathrm{E}\sin\theta\cos(-\,\mathrm{u}x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t - 2\delta' - 2\delta'' + \pi).\end{cases}$$

La différence de phase est $\pi - 2\delta''$, et l'on a

$$\operatorname{tang}2\theta_1 = \operatorname{tang}2\theta \times \cos(\pi - 2\delta''),$$

$$\pm\, ab = \mathrm{E}^2\sin\theta\cos\theta \times \sin 2\delta''.$$

Quand on néglige ε, la différence de phase est donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\delta'' = \cot\alpha\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2\sin^2\alpha}};$$

on retombe sur celle de Fresnel qui donne l'angle double.

La vibration transversale réfractée s'est changée, comme les vibrations longitudinales, en une vibration elliptique n'existant que dans le voisinage du plan de séparation, mais seulement dans le second milieu, et se propageant avec la même vitesse $\frac{\omega}{\sin\alpha}$. Lorsque le rayon incident a sa vibration parallèle à oz, les vibrations longitudinales ne se produisent pas, et la vibration transversale évanescente rectiligne

$$\zeta = 2C\cos\delta' e^{-U'x}\cos(vy - st - \delta')$$

existe seule dans le second milieu. Une expérience bien connue de Fresnel a mis en évidence l'existence de cette vibration.

21. Il est à remarquer que tous les cas de la question sont compris dans les formules (17) et (19) du § IV. Il suffit d'y considérer certains angles comme devenant imaginaires. Supposons, par exemple, que la vibration transversale réfractée soit persistante et les deux vibrations longitudinales évanescentes. Les angles α_1 et α'_1 sont imaginaires, et l'on a

$$\cot\alpha_1 = \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha_1} - 1} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_1^2\sin^2\alpha} - 1} = i\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2\sin^2\alpha}},$$

$$\cot\alpha'_1 = i\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1'^2\sin^2\alpha}},$$

$$\operatorname{tang}\varpi = -\frac{\cot\alpha_1 - \cot\alpha'_1}{1 + \cot\alpha_1\cot\alpha'_1} = -\varepsilon i.$$

Les équations (19) deviennent

$$D_1 = -D\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} \times \frac{\cos(\alpha + \alpha') - \operatorname{tang}\varpi\sin(\alpha + \alpha')}{\cos(\alpha - \alpha') + \operatorname{tang}\varpi\sin(\alpha - \alpha')},$$

$$D'_1 = D\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} \times \frac{1}{\cos(\alpha - \alpha') + \operatorname{tang}\varpi\sin(\alpha - \alpha')};$$

en remplaçant $\operatorname{tang}\varpi$ par $-\varepsilon i$, on obtient les formules (23).

22. Il semble que l'expérience puisse décider la question en ce qui concerne l'existence des vibrations longitudinales. 1° Si ces vibrations ne peuvent pas se propager dans l'éther, c'est-à-dire si ω_1^2 et $\omega_1'^2$ sont des quantités négatives, il faudra prendre les formules de la section V.

Quel que soit l'angle d'incidence, un rayon incident polarisé en ligne droite dans un azimut différent de 0 et de 90 degrés donnera naissance à un rayon réfléchi et à un rayon réfracté polarisés elliptiquement. 2° Si les vibrations longitudinales peuvent se propager dans l'éther, et si leur vitesse de propagation est moindre que celle des vibrations transversales, on prendra les formules de la section IV; le rayon réfléchi et le rayon réfracté seront toujours polarisés en ligne droite comme le rayon incident. 3° Si la vitesse de propagation des vibrations longitudinales est réelle et plus grande que celle des vibrations transversales, il faudra prendre les formules de la section IV ou celles de la section V, suivant la grandeur de l'angle d'incidence. Tant que $\sin\alpha$ sera inférieur à chacun des rapports $\frac{\omega}{\omega_1}$, $\frac{\omega}{\omega'_1}$, on prendra les premières formules; mais quand $\sin\alpha$ sera plus grand que ces rapports, on prendra les secondes. Jusqu'à une certaine limite de l'angle d'incidence, on aura la polarisation rectiligne, au delà la polarisation elliptique.

VII.

23. Nous avons supposé dans tout ce qui précède que l'onde incidente est une onde transversale; la même méthode peut être appliquée à la réflexion et à la réfraction d'une onde longitudinale. Cette onde donnerait naissance à deux ondes réfléchies, l'une longitudinale, l'autre transversale, et aussi à deux ondes réfractées. Les rayons transversaux auraient leurs vibrations rectilignes et situées dans le plan d'incidence. En appelant α_1 l'angle d'incidence, α, α', α'_1 les angles de la normale au plan de séparation avec le rayon transversal réfléchi, le rayon réfracté transversal et le rayon réfracté longitudinal, on obtient les formules

$$b_1 = b\,\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha'_1)\cos(\alpha_1 + \alpha'_1 + \alpha - \alpha')}{\sin(\alpha_1 + \alpha'_1)\cos(\alpha_1 - \alpha'_1 - \alpha + \alpha')},$$

$$b' = -\,b\,\frac{2\sin^2\alpha'_1\cos\alpha_1\cos(\alpha + \alpha')}{\sin\alpha_1\sin(\alpha_1 + \alpha'_1)\cos(\alpha_1 - \alpha'_1 - \alpha + \alpha')},$$

$$\mathrm{B} = -\,b\,\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha_1\sin(\alpha_1 - \alpha'_1)}{\sin(\alpha + \alpha')\cos(\alpha_1 - \alpha'_1 - \alpha + \alpha')},$$

$$\mathrm{B}' = b\,\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha'\cos\alpha_1\sin(\alpha_1 - \alpha'_1)}{\sin(\alpha + \alpha')\cos(\alpha_1 - \alpha'_1 - \alpha + \alpha')},$$

analogues aux formules (18). Les lettres b, b_1, b', B, B' désignent les amplitudes des projections sur oy de la vibration incidente, des vibrations longitudinales réfléchie et réfractée, des vibrations transversales réfléchie et réfractée. On en déduit cette conséquence remarquable : c'est que si les vibrations longitudinales se propagent réellement dans l'éther, il serait possible par la réflexion ou la réfraction de les transformer partiellement en vibrations transversales, et de les rendre ainsi lumineuses.

La méthode qui précède ne repose sur aucune hypothèse concernant la densité de l'éther dans les milieux pondérables. On n'a fait usage que du principe de continuité, ou de l'accord des vibrations à la surface de séparation des deux milieux. Si l'on applique le théorème des forces vives aux résultats obtenus, on arrive à des conséquences conformes à l'hypothèse de Fresnel.

Dans un second Mémoire, nous appliquerons la même méthode aux milieux biréfringents.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE PAR M. BESGE.

« ... Soit p un nombre premier de la forme $4l+1$. Posons d'abord, avec Legendre,

$$\left(\frac{m}{p}\right) = \pm 1,$$

suivant que l'entier m est ou n'est pas résidu quadratique de p. Prenons, en outre,

$$\left(\frac{m}{p}\right) = 0$$

quand m est divisible par p; enfin, considérons la somme

$$\left(\frac{m}{p}\right) + 2\left(\frac{m-1^2}{p}\right) + 2\left(\frac{m-2^2}{p}\right) + \ldots + 2\left(\frac{m-4l^2}{p}\right),$$

que je désignerai par S. Je trouve que l'on a

$$S = -1$$

lorsque m est premier à p, tandis que

$$S = p-1$$

quand m est divisible par p.

» La démonstration de ce théorème est fort simple, et je ne crois pas avoir besoin de l'ajouter ici. »

DE LA COURBE
QUI EST A ELLE-MÊME SA PROPRE PODAIRE;

PAR M. J.-N. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE.**

1. Je me propose ici de trouver une courbe qui soit à elle-même sa propre podaire, ou, pour prendre le problème sous un point de vue plus général, celle qui a pour podaire une ligne semblable à elle-même et tournée d'un certain angle autour du pôle. Nous pouvons d'ailleurs nous borner aux podaires orthogonales, puisque toute podaire oblique est de son côté semblable à la podaire orthogonale et tournée d'un certain angle.

Nous obtiendrons par cela même la solution de cette autre question : Trouver une courbe telle, qu'en la faisant rouler sur une courbe égale, elle engendre par quelque point de son plan une ligne semblable tournée d'un certain angle autour du point qui correspond dans la courbe fixe au point décrivant de la ligne mobile.

En d'autres termes encore : Trouver une courbe telle, qu'elle ait pour anticaustique par réflexion une ligne semblable tournée d'un certain angle autour du foyer lumineux.

Remarquons enfin que si ce profil se trouve employé dans une machine comme excentrique pour manœuvrer un cadre, il jouira et jouira seul de la propriété de le conduire de la même manière dans les deux positions, très-différentes en général au point de vue de la loi du mouvement, pour lesquelles le cadre est perpendiculaire à son plan ou circonscrit à la courbe dans son plan même [*].

2. Nous devons d'abord mettre à part une première solution évi-

[*] HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Traité des Mécanismes*, p. 88.

dente qui est la ligne droite. Elle répond en effet à la rigueur des termes de l'énoncé, et pour un pôle quelconque; car le pied des perpendiculaires abaissées sur toutes les tangentes se trouve sur la ligne elle-même, et satisfait par suite à une équation identique. Mais il est clair en même temps que cette solution ne remplit pas l'objet que nous avons en vue.

3. Si la courbe cherchée a pour podaire une ligne semblable, on peut dire également que celle dont elle est la podaire lui est semblable et prendre le problème sous ce point de vue inverse. Désignons donc par

$$r = f(\theta)$$

la courbe inconnue, et cherchons celle dont elle est la podaire. Il faudra pour cela, par l'extrémité du rayon vecteur r, élever la perpendiculaire

$$r' \cos(\theta' - \theta) = r,$$

et prendre l'enveloppe de cette droite; ce qui se fera en éliminant θ entre cette formule et son équation dérivée par rapport à θ, c'est-à-dire entre les deux relations

$$r' \cos(\theta' - \theta) = f(\theta),$$
$$r' \sin(\theta' - \theta) = f'(\theta).$$

Le résultat de cette élimination devra être

$$r' = mf(\theta' + \mu),$$

en désignant par m et μ deux constantes arbitraires.

Ainsi donc la question revient à déterminer la fonction f de manière à satisfaire au système

$$(1)\qquad \begin{cases} mf(\theta' + \mu)\cos(\theta' - \theta) = f(\theta), \\ mf(\theta' + \mu)\sin(\theta' - \theta) = f'(\theta), \end{cases}$$

qui est au fond celui de *deux équations simultanées aux différences mêlées*, et mêlées même d'une manière plus compliquée qu'à l'ordi-

naire; car θ y désigne une fonction inconnue de θ' subordonnée à la principale fonction inconnue f, au lieu de figurer comme à l'ordinaire d'une manière distincte dans les formules.

4. La première donne par la différentiation

$$mf'(\theta'+\mu)\cos(\theta'-\theta) - mf(\theta'+\mu)\sin(\theta'-\theta)\left(1-\frac{d\theta}{d\theta'}\right) = f'(\theta)\frac{d\theta}{d\theta'};$$

mais on a, d'après la seconde,

$$mf(\theta'+\mu)\sin(\theta'-\theta)\frac{d\theta}{d\theta'} = f'(\theta)\frac{d\theta}{d\theta'}.$$

Si l'on retranche, m disparaît et il reste

$$f'(\theta'+\mu)\cos(\theta'-\theta) = f(\theta'+\mu)\sin(\theta'-\theta).$$

On a de même, en multipliant en croix les équations (1),

$$f'(\theta)\cos(\theta'-\theta) = f(\theta)\sin(\theta'-\theta).$$

On déduit de ces deux dernières formules

$$(2) \qquad \tan(\theta'-\theta) = \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{f'(\theta'+\mu)}{f(\theta'+\mu)}.$$

Si nous étions autorisés à considérer θ et θ' comme deux valeurs absolument quelconques, cette équation entraînerait la suivante :

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \text{const.},$$

et conduirait immédiatement à la détermination de la fonction f. Mais une telle affirmation ne serait pas légitime en ce moment, car θ et θ' ne sont pas indépendants. En effet, θ est l'azimut du pied de la perpendiculaire abaissée sur la tangente au point dont l'azimut est θ'. Il est donc une fonction de θ', inconnue à la vérité, mais déterminée.

5. Faisons, pour la désigner provisoirement,

(3) $$\theta' = \varphi(\theta) - \mu,$$

les formules (2) deviendront

$$\text{tang}\{\varphi(\theta) - \theta - \mu\} = \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{f'[\varphi(\theta)]}{f[\varphi(\theta)]}.$$

Si dans cette relation, qui est maintenant une identité, nous remplaçons θ par $\varphi(\theta)$, elle donnera

$$\text{tang}\{\varphi[\varphi(\theta)] - \varphi(\theta) - \mu\} = \frac{f'[\varphi(\theta)]}{f[\varphi(\theta)]} = \frac{f'\{\varphi[\varphi(\theta)]\}}{f\{\varphi[\varphi(\theta)]\}};$$

et comme ces égalités ont un membre commun,

$$\text{tang}\{\varphi[\varphi(\theta)] - \varphi(\theta) - \mu\} = \text{tang}[\varphi(\theta) - \theta - \mu],$$
$$\{\varphi[\varphi(\theta)] - \varphi(\theta) - \mu\} = \{\varphi(\theta) - \theta - \mu\} + k\pi,$$

et enfin, μ disparaissant,

$$\varphi[\varphi(\theta)] - 2\varphi(\theta) + \theta = k\pi.$$

Mais cette équation doit encore perdre son second membre. On peut en effet l'écrire

$$\{\theta - \varphi(\theta)\} - \{\varphi(\theta) - \varphi[\varphi(\theta)]\} = k\pi.$$

Or $\varphi(\theta)$ représente $\theta' + \mu$ (3), et peut être remplacé par cette valeur dans la première parenthèse. Dans la seconde, envisageons $\varphi(\theta)$ comme l'azimut θ_1 d'un nouveau point M_1 de la podaire; $\varphi[\varphi(\theta)]$ ou $\varphi(\theta_1)$ représentera pareillement $\theta'_1 + \mu$, en désignant par θ'_1 l'azimut du point de contact de la tangente élevée perpendiculairement à l'extrémité du rayon r_1 de la podaire, de même que θ' est celui que l'on déduit du premier point M. L'équation devient par là

$$[\theta - (\theta' - \mu)] - [\theta_1 - (\theta'_1 - \mu)] = k\pi,$$

et comme μ disparaît encore,

$$(\theta - \theta') - (\theta_1 - \theta'_1) = k\pi.$$

Or $\theta - \theta'$ et $\theta_1 - \theta'_1$ sont, sauf leur signe qui peut être positif ou négatif, les angles nécessairement aigus du rayon vecteur et de la perpendiculaire à la tangente menée en son extrémité. Leur somme ou leur différence ne peut donc atteindre une demi-circonférence, et l'on doit avoir $k = 0$. La relation qui détermine la fonction φ prend ainsi la forme définitive

$$\varphi[\varphi(\theta)] - 2\varphi(\theta) + \theta = 0. \tag{4}$$

6. Cette équation d'une forme inusitée revient au fond au problème suivant : Déterminer une fonction telle, qu'entre elle et sa fonction inverse la moyenne arithmétique soit la variable elle-même. Si, en effet, de la relation

$$x = \varphi(\theta)$$

on déduit

$$\theta = \psi(x),$$

l'équation (4) pourra s'écrire de la manière suivante :

$$\varphi(x) + \psi(x) = 2x.$$

Pour la résoudre, considérons une série de valeurs θ, θ_1, θ_2, θ_3,... de la variable fournies par les conditions

$$\theta_1 = \varphi(\theta), \quad \theta_2 = \varphi(\theta_1) = \varphi[\varphi(\theta)], \quad \theta_3 = \varphi(\theta_2) = \varphi\{\varphi[\varphi(\theta)]\}, \ldots,$$

elles formeront aussi, comme on le voit, une série de valeurs de la fonction φ. L'équation (4) deviendra sous sa forme actuelle

$$\theta_2 - 2\theta_1 + \theta = 0,$$

et généralement, en y changeant θ en θ_1, θ_2, θ_3, ..., θ_n,

$$\theta_{n+2} - 2\theta_{n+1} + \theta_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$\theta_{n+2} - \theta_{n+1} = \theta_{n+1} - \theta_n.$$

Cette série forme donc une progression arithmétique, et comme elle

appartient à la fois à la variable θ et à sa fonction φ, on voit qu'à une série de valeurs de la variable en progression arithmétique de raison $\Delta\theta$ en correspond pour la fonction une autre, en progression arithmétique pareillement, avec une raison égale $\Delta\varphi$,

$$\Delta\varphi = \Delta\theta, \tag{5}$$

d'où

$$\varphi(\theta) = \theta + c,$$

en désignant par c une constante arbitraire [*].

7. Si maintenant nous rendons à $\varphi(\theta)$ sa valeur (3),

$$\theta' + \mu = \theta + c,$$

il vient

$$\theta' - \theta = \text{const.} = \alpha. \tag{6}$$

L'angle $\theta' - \theta$ du rayon vecteur et de la normale doit donc rester constant, ce qui est le caractère exclusif de la spirale logarithmique. Telle est, par suite, la solution la plus générale de la question proposée.

Comme on sait d'ailleurs que, pour cette courbe en particulier, toute ligne semblable est une spirale égale tournée d'un certain angle autour du pôle, on peut réduire après coup à une seule, par exemple à la seconde, les deux conditions qui lui sont imposées dans l'énoncé : d'être amplifiée dans le rapport de 1 à m et tournée de l'angle μ.

8. Si l'on demande en particulier que la courbe soit à elle-même sa propre podaire, la solution ne devra être cherchée que dans le résultat précédent, et il suffira de faire en sorte que la quantité dont la spi-

---

[*] La relation (5) étant une équation aux différences finies, à la vérité la plus simple de toutes, c devrait désigner une fonction périodique si $\Delta\theta$ était déterminé. Mais $\Delta\theta$, c'est-à-dire $\theta_1 - \theta$ ou $\varphi(\theta) - \theta$, est absolument quelconque, puisque θ reste arbitraire. Il faudrait donc que c eût une infinité de périodes, ce qui le réduit au rôle de constante.

rale a tourné sur son pôle sans changer de forme soit nulle ou égale à un nombre entier de circonférences.

Pour évaluer cette quantité, remontons à la valeur constante (6) de l'angle du rayon vecteur et de la normale

$$\frac{dr'}{r'\,d\theta'} = \operatorname{tang}\alpha,$$

$$\log r' = \theta' \operatorname{tang}\alpha + \mathrm{A},$$

$$r' = e^{\theta' \operatorname{tang}\alpha + \mathrm{A}}.$$

Il est facile de voir que

$$r = r'\cos\alpha, \quad \theta = \theta' - \alpha.$$

La podaire sera donc

$$r = e^{(\theta+\alpha)\operatorname{tang}\alpha + \mathrm{A}}\cos\alpha,$$

ce qu'on peut écrire

$$r = e^{\left[\theta + \left(\alpha + \frac{\log\cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}\right)\right]\operatorname{tang}\alpha + \mathrm{A}}.$$

L'angle de rotation a, par suite, pour valeur

$$\alpha + \frac{\log\cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

L'équation qui détermine α sera, d'après cela, en désignant par i un nombre entier quelconque positif ou négatif,

$$\alpha + \frac{\log\cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = 2i\pi.$$

Elle admet pour racines

$$\alpha = 2i\pi,$$

attendu que l'on a, en faisant disparaître l'indétermination,

$$\frac{\log\cos 2i\pi}{\operatorname{tang} 2i\pi} = 0.$$

Mais nous ne devons employer ici que la racine qui correspond à $i = 0$,

$$\alpha = 0,$$

car α est nécessairement un angle aigu. Cette solution indique que la normale se confond avec le rayon vecteur, ou que la spirale dégénère en un cercle.

Il ne saurait, du reste, exister d'autre solution. En effet, si nous faisons varier α de o à $\frac{\pi}{2}$, ce qui suffit, ainsi que nous l'avons fait remarquer, la dérivée du premier membre qui se réduit, tout calcul fait, à

$$-\frac{\log \cos \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

reste essentiellement positive. Le premier membre croît donc incessamment à partir de zéro, sans s'annuler de nouveau.

SUR UNE

NOUVELLE GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE;

Par M. J. PLÜCKER,

Professeur à l'Université de Bonn, Membre associé de la Société Royale de Londres [*].

I. — *Des complexes linéaires de lignes droites.*

1. L'espace indéfini peut, au point de vue géométrique, être considéré indistinctement comme étant formé par des points, ou comme étant traversé par des plans. Dans le premier cas, chaque point est déterminé par ses coordonnées (x, y, z, par exemple) prises dans leur acception ordinaire. Dans le second mode de conception, chaque plan est de même déterminé par ses coordonnées (t, u, v, par exemple), dont nous avons introduit l'usage dans la Géométrie analytique vers l'année 1830.

L'équation

$$tx + uy + vz + 1 = 0,$$

si l'on y regarde x, y, z comme des variables, et t, u, v comme des quantités constantes, représente l'ensemble des points situés dans un même plan, c'est-à-dire représente ce plan lui-même. Les trois constantes t, u, v sont les coordonnées du plan.

La même équation, si l'on y regarde t, u, v comme des variables, et x, y, z comme des constantes, représente l'ensemble des plans qui passent par un même point, et par conséquent représente ce point lui-même; les trois constantes sont les coordonnées du point.

Un point donné par ses coordonnées et un point déterminé par son équation, ou, pour parler géométriquement, par un nombre infini de

[*] Le Mémoire original, écrit en anglais, a été présenté à la Société Royale de Londres le 22 décembre 1864, et lu dans la séance du 2 février 1865.

plans qui se coupent en ce point, sont deux idées entièrement différentes et qu'on ne doit pas confondre l'une avec l'autre. Il en est de même d'un plan donné par ses coordonnées et d'un plan représenté par son équation, c'est-à-dire considéré comme contenant un nombre infini de points.

De là découle une double signification de la ligne droite. On peut la considérer comme étant le lieu géométrique d'une infinité de points, ou, ce qui revient au même, comme étant décrite par un point qui se meut dans sa direction; et, dans ce cas, on la représente par deux équations en x, y, z, dont chacune représente un plan passant par cette droite.

Mais on peut également regarder la ligne droite comme étant l'intersection commune d'une infinité de plans, ou comme étant l'enveloppe d'un plan mobile qui tourne sur elle comme autour d'un axe; et, dans ce cas, elle est représentée par deux équations en t, u, v, dont chacune représente un de ses points, choisi d'ailleurs arbitrairement.

2. La constitution géométrique de l'espace, que nous venons de rapporter au point ou au plan, peut également être dérivée de la ligne droite; et, comme celle-ci est susceptible d'une double définition (**1**), il s'ensuit que, dans ce nouvel ordre d'idées, la constitution de l'espace peut être envisagée à un double point de vue.

Dans le premier de ces deux points de vue, l'espace indéfini est regardé comme étant traversé par des lignes droites dont chacune se compose d'une infinité de points consécutifs, c'est-à-dire est décrite par le mouvement d'un de ses points. Par chaque point de l'espace, il passe un nombre infini de lignes droites qui ont toutes les directions possibles. Cette constitution géométrique de l'espace est celle qu'on admet implicitement, en optique, quand on considère les sources lumineuses comme envoyant des rayons de lumière dans toutes les directions, et, en mécanique, quand on regarde les forces comme agissant en tous sens sur les points matériels dont on suppose que les corps sont formés.

D'après l'autre point de vue, l'espace indéfini est encore regardé comme traversé par des lignes droites; seulement ces lignes sont déterminées, non plus par les points qui les composent, mais par les

plans qui y passent. Chaque plan contient un nombre infini de lignes droites qui y possèdent toutes les positions et toutes les directions imaginables, et le plan peut tourner autour de chacune d'elles. On adopte implicitement cette deuxième conception, en optique, quand, au lieu de rayons de lumière, on considère les surfaces correspondantes des ondes et leurs intersections mutuelles, et, en mécanique, quand on introduit avec Poinsot la notion ingénieuse et philosophique des *couples*, qui s'y présentent au même titre que les forces ordinaires et y remplissent un rôle non moins essentiel. Les axes instantanés de rotation sont des droites qui appartiennent à ce deuxième mode de conception.

3. Afin de poser les fondements d'une nouvelle Géométrie de l'espace, basée sur les considérations qui précèdent, il faut avant tout fixer dans l'espace la position d'une ligne droite qui dépend de quatre constantes. A cet effet, nous eussions pu prendre quatre droites fixes et y rapporter la position d'une droite quelconque, en déterminant, par exemple, les plus courtes distances de la droite à ces quatre axes. Mais nous avons cru devoir rejeter ce système et d'autres analogues, et adopter simplement, pour la détermination dont il s'agit, celui des axes coordonnés dont on fait ordinairement usage. Ainsi les recherches que nous publions aujourd'hui sont intimement liées avec les méthodes usuelles de la Géométrie analytique; mais ces méthodes y sont mises en œuvre d'une manière nouvelle, dont le présent Mémoire a pour but de donner une idée précise, et dont l'importance est, si nous ne nous abusons, plus grande peut-être qu'on ne croirait au premier abord. D'autres Mémoires pourront venir corroborer cette opinion, s'il nous est donné de les terminer.

4. Nous donnerons le nom de *rayon* à la ligne droite, quand on la considère d'après le premier mode de génération, et le nom d'*axe* quand on la considère d'après le deuxième mode.

Cela posé, un *rayon* peut être déterminé par le moyen de ses projections sur deux plans fixes. Afin d'obtenir le plus de symétrie possible, sans trop généraliser, nous choisirons les projections sur les plans coordonnés XZ, YZ, et nous prendrons pour leurs équations, soit le

système

(1) $$\begin{cases} x = rz + \rho, \\ y = sz + \sigma, \end{cases}$$

soit le système

(2) $$\begin{cases} tx + v_x z = 1, \\ uy + v_y z = 1. \end{cases}$$

Si l'on adopte le premier système de ces équations, les quatre constantes r, s, ρ, σ sont les *coordonnées du rayon* : deux d'entre elles, r, s, marquent sa direction; les deux autres, ρ, σ, fixent ensuite sa position dans l'espace. Le point où le rayon perce le plan XY a pour coordonnées $x = \rho$, $y = \sigma$.

Si l'on adopte le second système d'équations, le même rayon est déterminé par les quatre constantes t, u, v_x, v_y, qu'on peut aussi regarder comme étant ses coordonnées; t et u $\left(\text{égales respectivement à } \frac{1}{\rho} \text{ et } \frac{1}{\sigma}\right)$ indiquent les valeurs réciproques des segments interceptés sur les axes OX, OY, à partir de l'origine O, par les deux projections du rayon; v_x, et v_y $\left(\text{égales respectivement à } -\frac{r}{\rho} \text{ et } -\frac{s}{\sigma}\right)$ indiquent les valeurs réciproques des segments qu'on obtient sur l'axe OZ, quand on y projette ces deux projections.

5. Un *axe*, c'est-à-dire une ligne droite envisagée d'après le deuxième mode de génération, est déterminé par deux quelconques de ses points. On peut choisir, pour ces points, ceux où l'axe perce les deux plans XZ et YZ, et les représenter soit par le système d'équations

(3) $$\begin{cases} xt + z_t v = 1, \\ yu + z_u v = 1, \end{cases}$$

soit par cet autre système, qui est également symétrique,

(4) $$\begin{cases} t = pv + \varpi, \\ u = qv + \varkappa. \end{cases}$$

En faisant usage du système (3), on a, pour les *coordonnées de l'axe*, les quatre constantes x, y, z_t, z_u qui fixent la position des deux points dans les plans XZ, YZ.

Si l'on adopte les deux équations (4), les constantes $p, q, \pi, \varkappa$ sont les quatre coordonnées de l'axe, qui est déterminé par l'intersection de deux plans, savoir : celui qui le projette sur le plan XY, et celui qui passe par l'axe et par l'origine O. Le premier de ces deux plans est déterminé par deux des quatre coordonnées

$$t = \varpi = \frac{1}{x}, \quad u = \varkappa = \frac{1}{y};$$

l'autre est déterminé par les deux coordonnées restantes

$$t = pv = -\frac{z_t}{x}v, \quad u = qv = -\frac{z_u}{x}v,$$

et a pour équation

$$px + qy + z = 0.$$

6. Si l'on regarde comme variables les quatre coordonnées d'un rayon, on peut, en leur donnant successivement toutes les valeurs possibles, obtenir la représentation analytique d'un rayon situé d'une manière quelconque dans l'espace. Actuellement, si l'on suppose que ces quatre coordonnées soient liées entre elles par une équation de condition, tous les rayons de l'espace ne satisfont plus à la question, et il y en a qui sont exclus par cette condition. Quant à l'ensemble de ceux qui restent, nous dirons qu'*ils forment un* COMPLEXE [*] *représenté par l'équation de condition.*

S'il existe, entre les coordonnées générales d'un rayon, deux équations de condition au lieu d'une, les rayons dont les coordonnées satisfont à ces deux équations simultanées forment ce que nous appelle-

---

[*] Le mot latin *complexus*, qui signifie un *entrelacement*, un *entre-croisement*, nous a semblé très-convenable pour exprimer l'idée nouvelle que nous présentons ici. Faute d'en trouver un meilleur, nous demandons la permission de l'introduire dans le langage mathématique.

rons une *congruence représentée par le système des deux équations*. Une *congruence* contenant tous les rayons communs à deux *complexes* peut être regardée comme étant l'intersection mutuelle de ces deux systèmes.

Si les équations de condition entre les quatre coordonnées sont au nombre de trois, les rayons correspondants sont situés sur une *surface réglée représentée par le système des trois équations*. Une surface réglée peut être regardée comme l'intersection mutuelle de trois complexes, c'est-à-dire comme le lieu géométrique des rayons communs aux trois complexes.

Quatre complexes ou deux surfaces réglées se coupent mutuellement suivant un nombre limité de rayons.

Les nombres des rayons dont l'ensemble forme une surface réglée, une congruence, un complexe et l'espace, sont des infinis du premier, du second, du troisième et du quatrième ordre respectivement.

7. Si l'on regarde les droites comme étant des *axes*, au lieu de les considérer comme des *rayons*, les complexes et les congruences de rayons deviennent des *complexes* et des *congruences d'axes*.

8. Une surface réglée composée de rayons ou d'axes, et représentée par trois équations linéaires, est un hyperboloïde ou un paraboloïde, selon les coordonnées dont on fait choix.

Supposons que la surface soit formée par des rayons, et que les trois équations données soient les suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases} Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho = 0, \\ A'r + B's + C' + D'\sigma + E'\rho = 0, \\ A''r + B''s + C'' + D''\sigma + E''\rho = 0. \end{cases}$$

De ces équations on peut en déduire, par l'élimination, six autres, dont chacune ne contienne que deux des quatre variables. Soient

$$(6)\qquad ar + bs = 1,$$

$$(7)\qquad c\rho + d\sigma = 1,$$

$$(8)\qquad a'r + c'\rho = 1,$$

$$(9)\qquad b's + d'\sigma = 1,$$

$$(10)\qquad a''r + d''\sigma = 1,$$

$$(11)\qquad b''s + c''\rho = 1,$$

les six équations ainsi obtenues. Trois quelconques d'entre elles peuvent servir, au lieu des équations (5), pour représenter la surface réglée.

L'équation (7) peut s'écrire

$$(7')\qquad cx + dy = 1,$$

en y remplaçant ρ et σ par x et y (5). Elle représente une ligne droite située dans le plan XY, et rencontrée par tous les rayons de la surface réglée.

Les équations (8) et (9) représentent deux points situés dans les plans XZ, YZ, et par lesquels passent les projections respectives de tous les rayons de la surface; en conséquence, les rayons eux-mêmes rencontrent deux droites passant par ces points et parallèles respectivement aux axes OY et OX.

Si l'on écrit les équations (8) et (9) de la manière suivante :

$$\frac{1}{c'} = \frac{a'}{c'} r + \rho,$$

$$\frac{1}{d'} = \frac{b'}{d'} s + \sigma,$$

on en tire immédiatement (4)

$$c'x = 1, \quad c'z = a',$$

$$d'y = 1, \quad d'z = b',$$

qui représentent ces deux lignes droites.

Ainsi, en choisissant les trois équations (7), (8), (9) pour représenter la surface réglée, et en cherchant leur interprétation géométrique, on prouve aisément que tous les rayons dont elle se compose

coupent trois droites fixes, dont l'une est située dans le plan XY, tandis que les deux autres sont parallèles à OY et à OX. Donc tous ces rayons, qui rencontrent trois droites parallèles à un même plan, forment un paraboloïde hyperbolique.

Pour déterminer ce paraboloïde, nous pouvons remplacer l'une des trois équations dont nous venons de faire usage par l'équation (6), qui indique que tous les rayons sont parallèles à un même plan fixe, dont l'équation (si on le mène par l'origine O)

$$ax + by = z$$

se déduit de (6) en écrivant $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, au lieu de r et s.

Nous nous bornerons à ajouter qu'une surface réglée composée de rayons, représentée par trois équations linéaires, devient un hyperboloïde, si ces équations ont lieu entre les coordonnées t, u, v_x, v_y, au lieu des coordonnées r, s, ρ, σ.

9. Une surface réglée composée d'*axes*, et représentée par trois équations linéaires, serait un paraboloïde si ces équations linéaires avaient lieu entre les coordonnées x, y, z_t, z_u; mais elle devient un hyperboloïde, si l'on prend pour coordonnées les variables p, q, ϖ, $\varkappa$. Nous nous bornerons à considérer ce dernier cas, et pour cela nous remplacerons directement les équations (6)-(11) par les suivantes :

$$ap + bq = 1, \tag{12}$$

$$c\varpi + d\varkappa = 1, \tag{13}$$

$$a'p + c'\varpi = 1, \tag{14}$$

$$b'q + d'\varkappa = 1, \tag{15}$$

$$a''p + d''\varkappa = 1, \tag{16}$$

$$b''q + c''\varpi = 1. \tag{17}$$

Trois quelconques de ces équations, renfermant six constantes, suffisent pour déterminer la surface réglée.

Si, après avoir remplacé p, q, ϖ, $\varkappa$ par

$$-\frac{z_t}{x}, \quad -\frac{z_u}{y}, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{y},$$

nous regardons x, y, z_t, z_u comme variables, les équations (14) et (15) peuvent s'écrire ainsi qu'il suit :

$$x + a'z = c',$$
$$y + b'z = d',$$

et représentent, dans les plans XZ, YZ, deux lignes droites (AA′, BB′), lieux des points de rencontre des deux plans par les axes générateurs de la surface réglée.

En regardant ϖ et $\varkappa$ comme les coordonnées d'une ligne droite, l'équation (13) écrite ainsi

$$ct + du = 1$$

représente un point fixe (E), dont les coordonnées ordinaires sont

$$x = c, \quad y = d,$$

et qui est enveloppé par les projections des axes sur le plan XY dans lequel il est lui-même situé. Donc toutes les génératrices de la surface réglée s'appuient sur une troisième droite cc' parallèle à OZ et coupant le plan XY au point E.

Nous concluons de là que la surface représentée par les trois équations linéaires est un hyperboloïde.

Le plan BOA, qui passe par l'origine O et par un axe quelconque AB, a pour équation

$$z + qy + px = 0.$$

L'équation (12), étant du premier degré par rapport à p et q, indique que tous les plans tels que BOA, dont chacun contient un des axes générateurs de la surface, se coupent mutuellement suivant une droite DD′ qui passe par le point O. Donc tous ces axes rencontrent une même quatrième droite, située elle-même sur l'hyperboloïde.

La détermination complète de l'hyperboloïde ne présente pas de difficulté. On peut trouver, par exemple, son centre et ses axes principaux en déterminant la plus courte distance de deux de ses génératrices.

10. Soit une congruence de rayons ou d'axes représentée par deux équations linéaires. Si à ces équations on en ajoute deux autres qui soient pareillement du premier degré, il n'existe qu'un seul rayon ou qu'un seul axe dont les coordonnées satisfassent simultanément aux quatre équations. Ces deux équations supplémentaires peuvent être choisies de telle sorte que les rayons et les axes soient assujettis à passer par un point donné ou à se trouver dans un plan donné.

S'il s'agit de rayons, soit (x', y', z') un point fixe; les deux équations

$$x' = rz' + \rho,$$
$$y' = sz' + \sigma$$

expriment que tous les rayons passent par ce point. Soit

$$t'x + u'y + v'z + 1 = 0$$

l'équation d'un plan donné; les deux équations

$$t'r + u's + v = 0,$$
$$t'\rho + u'\sigma + 1 = 0$$

expriment que les rayons sont situés dans ce plan.

S'il s'agit d'axes, soit (t', u', v') un plan fixe; nous aurons les équations linéaires

$$t'x + v'z_t = 1, \quad t' = pv' + \varpi,$$
$$u'x + v'z_u = 1, \quad u' = qv' + \varkappa,$$

pour exprimer qu'un axe est situé dans ce plan. Soit, en regardant x', y', z' comme des constantes et t, u, v comme des variables,

$$x't + y'u + z'v + 1 = 0$$

l'équation d'un point fixe, les équations

$$x'p + y'q + z' = 0,$$
$$x'\varpi + y'\varkappa + 1 = 0$$

expriment que les axes passent par ce point. Donc, *quand une congruence est représentée par un système de deux équations linéaires, elle ne contient qu'un seul rayon ou qu'un seul axe qui passe par un point donné, ou qui soit situé dans un plan donné.*

11. Nous ferons usage des coordonnées t, u, v_x, v_y pour représenter une congruence de rayons. Soient

$$\mathrm{A}t + \mathrm{B}u + \mathrm{C}v_x + \mathrm{D}v_y + 1 = 0,$$
$$\mathrm{A}'t + \mathrm{B}'u + \mathrm{C}'v_x + \mathrm{D}'v_y + 1 = 0$$

ses deux équations. En éliminant successivement chacune des coordonnées, nous tirerons de ces deux équations quatre équations nouvelles de la forme

$$at + bu + cv_x + 1 = 0,$$
$$a't + b'u + dv_y + 1 = 0,$$
$$a''t + c'v_x + d'v_y + 1 = 0,$$
$$b''u + c''v_x + d''v_y + 1 = 0,$$

dont on peut prendre deux quelconques, renfermant six constantes, pour remplacer les équations primitives, les deux autres étant une conséquence de celles-là.

Les deux premières de ces équations, si l'on y considère t, u, v_x et t, u, v_y comme des *coordonnées planaires*, représentent deux points (U, V) dont les coordonnées sont

$$(\mathrm{U}) \qquad x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$
$$(\mathrm{V}) \qquad x = a', \quad y = b', \quad z = c'.$$

Conséquemment les six constantes desquelles dépend la congruence, si on la rapporte à trois axes coordonnés OX, OY, OZ, sont déterminées par les deux points U et V, et de là découle la construction suivante des rayons de la congruence.

Par les deux points U et V respectivement, menez deux plans quelconques qui se coupent suivant une droite située dans le plan XY, et qui rencontre les axes OX, OY aux points D, F. Soient E, G les points

de rencontre de l'axe OZ par ces plans. Les droites DE, FG seront les projections d'un rayon de la congruence sur les plans XZ, YZ. Le rayon (AC) ainsi déterminé coupera le plan XY au point C, dont les coordonnées sont

$$x = \frac{1}{t} = \mathrm{OD}, \quad y = \frac{1}{u} = \mathrm{OF}.$$

Si l'on mène un plan quelconque par les deux points U et V, les deux points E, G se confondent en un seul A', et le rayon correspondant (A'C') coupe l'axe OZ.

Si l'on projette la droite UV sur les plans YZ, XZ, ses projections rencontrent OZ en deux points A'', A'''. C'est en ces points que l'axe OZ est coupé par les rayons de la congruence qui sont parallèles à OX et à OY. Le rayon parallèle à l'axe OZ coupe le plan XY en un point C'', dont les coordonnées sont

$$x = \mathrm{OD}'', \quad y = \mathrm{OF}'',$$

D'' et F'' étant les points de rencontre de OX et OY par la projection de UV sur le plan XY.

Et de là on peut conclure la construction des rayons qui passent par un point quelconque de l'axe OZ ou du plan XY. Mais nous n'insisterons pas sur ce sujet.

12. En second lieu, supposons qu'une congruence d'*axes* soit représentée par les équations

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z_t + \mathrm{D}z_u + 1 &= 0, \\ \mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}'z_t + \mathrm{D}'z_u + 1 &= 0. \end{aligned}$$

En éliminant successivement z_u et z_t, nous pouvons remplacer successivement ces équations par les deux suivantes :

$$\begin{aligned} ax + by + cz_t + 1 &= 0, \\ a'x + b'y + c'z_u + 1 &= 0, \end{aligned}$$

dont les six constantes sont une conséquence de celles qui étaient don-

nées primitivement. En regardant x, y, z_t, z_u comme des *coordonnées ponctuelles,* et écrivant z au lieu de z_t et z_u, ces dernières équations représentent deux plans. Les six coordonnées de ces deux plans, savoir :

$$t = a, \quad u = b, \quad v = c,$$
$$t = a', \quad u = b', \quad v = c',$$

sont les six constantes de la congruence. La congruence est donc déterminée par ces deux plans et par les axes coordonnés.

Supposons que ces deux plans soient connus, et soit menée parallèlement à OZ une droite quelconque qui rencontre le premier en M et le second en M'; enfin projetons le point M en A sur XZ et le point M' en B sur YZ. La droite AB est un axe de la congruence.

Si l'on projette sur XZ et sur YZ un point quelconque de la droite JK, intersection des deux plans, la droite B'A' qui joint ces deux projections est un axe parallèle au plan XY. Tous les axes obtenus ainsi rencontrent les deux projections de JK sur les plans XZ et YZ. Donc les axes de la congruence, parallèles au plan XY, forment un paraboloïde. Le rayon situé dans le plan XY s'obtient en projetant sur les axes OX et OY le point de rencontre des traces des deux plans sur le plan XY, et en joignant ces deux projections B'', A'' par une ligne droite, etc.

15. Après ces discussions préliminaires, nous allons suivre une marche plus systématique, et nous ne ferons usage que des coordonnées r, s, ρ, σ.

Quand un complexe de rayons est représenté par l'équation linéaire

$$(1) \qquad Ar + Bs + D\sigma + E\rho + 1 = 0,$$

il est aisé de prouver que les rayons, en nombre infini, qui passent par un même point de l'espace, sont situés dans un même plan, et que, réciproquement, tous les rayons situés dans le même plan concourent en un même point de ce plan.

Pour distinguer ceux des rayons du complexe qui passent par le point donné (x', y', z'), il faut joindre les deux équations suivantes à

celle du complexe

$$(2)\qquad \begin{cases} x' = rz' + \rho, \\ y' = sz' + \sigma. \end{cases}$$

Éliminant ρ et σ, il vient

$$(3)\qquad (\mathrm{A} - \mathrm{E}z')r + (\mathrm{B} - \mathrm{D}z')s + (1 + \mathrm{E}x' + \mathrm{D}y') = 0.$$

Cette équation étant du premier degré par rapport aux variables restantes r et s, prouve que les rayons correspondants sont parallèles à un plan fixe, et conséquemment sont situés dans un même plan mené suivant cette direction par le point (x', y', z'). Remplaçant, dans cette dernière équation, r et s par leurs valeurs $\frac{x-x'}{z-z'}, \frac{y-y'}{z-z'}$, on obtient, pour l'équation du plan dont il s'agit,

$$(4)\quad (\mathrm{A}-\mathrm{E}z')(x-x')+(\mathrm{B}-\mathrm{D}z')(y-y')+(1+\mathrm{E}x'+\mathrm{D}y')(z-z')=0.$$

14. Cette équation, qui est du premier degré par rapport à (x', y', z'), prouve que, réciproquement, tous les rayons contenus dans un plan donné concourent en un même point de ce plan.

15. Un complexe dont les rayons sont distribués dans l'espace de telle sorte que, par chaque point, il en passe une infinité contenus dans un même plan et que, réciproquement, dans chaque plan il y en a une infinité concourant en un même point, peut être appelé un *complexe linéaire de rayons*. Nous pouvons dire aussi que, relativement à ce complexe, les points et les plans de l'espace indéfini *se correspondent mutuellement*; chaque plan contenant tous les rayons qui se rencontrent en un même point de ce plan, et chaque point étant traversé par tous les rayons situés dans un plan qui passe par ce point.

16. L'équation (1) représente un complexe linéaire de rayons; mais il est aisé de voir que cette équation n'est pas l'équation *générale* d'un complexe linéaire. Les considérations suivantes vont nous amener à généraliser les développements dans lesquels nous sommes déjà entré, et en même temps à les rendre plus symétriques.

Jusqu'à présent nous avons déterminé un rayon par ses deux pro-

jections sur les plans XZ, YZ

$$x = rz + \rho,$$
$$y = sz + \sigma,$$

d'où l'on déduit, pour sa projection sur le plan XY,

$$(5) \qquad ry - sx = r\sigma - s\rho.$$

Cette équation fournit le nouveau terme $(r\sigma - s\rho)$ qui dépend linéairement, de même que ρ et σ, de r et de s aussi bien que de x et y.

Pareillement, des équations

$$tr + us + v = 0,$$
$$t\rho + u\sigma + w = 0,$$

exprimant que le rayon (r, s, ρ, σ) est situé dans le plan (t, u, v, w) représenté par l'équation

$$tx + uy + vz + w = 0\ [*],$$

on déduit la relation

$$(6) \qquad \frac{w}{t}\cdot s - \frac{v}{t}\sigma = (r\sigma - s\rho).$$

17. Si l'on introduit un nouveau terme contenant $(s\rho - r\sigma)$, l'équation du complexe peut s'écrire ainsi :

$$(7) \qquad Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) = 0.$$

Ensuite éliminant $(r\sigma - s\rho)$ à l'aide de l'équation

$$ry' - sx' = r\sigma - s\rho,$$

---

[*] Désormais nous ferons usage des quatre coordonnées planaires t, u, v, w, et par suite nous représenterons un point par une équation homogène. Quelquefois nous écrirons, pour abréger et pour plus de symétrie, $\frac{\xi}{\theta}$, $\frac{\eta}{\theta}$, $\frac{\zeta}{\theta}$ au lieu de x, y, z, et conséquemment un plan sera représenté par une équation homogène entre les quatre coordonnées ponctuelles ξ, η, ζ, θ.

et suivant la marche adoptée au n° **15**, on trouve, pour représenter le plan relatif au point x', y', z', l'équation

$$(8) \quad \begin{cases} (A - Fy' - Ez')(x - x') + (B + Fx' - Dz')(y - y') \\ \qquad\qquad + (C + Ex' + Dy')(z - z') = 0. \end{cases}$$

On peut développer cette équation comme il suit :

$$(9) \quad \begin{cases} (A - Fy' - Ez')x + (B + Fx' - Dz')y \\ \qquad\qquad + (C + Ex' + Dy')z = Ax' + By' + Cz', \end{cases}$$

et la ramener ensuite à la forme plus symétrique

$$(10) \quad \begin{cases} A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + D(y'z - z'y) \\ \qquad\qquad + E(x'z - z'x) + F(x'y - y'x) = 0. \end{cases}$$

18. Nous allons prouver directement que tous les rayons situés dans un plan donné concourent en un même point. Soit

$$(11) \qquad t'x + u'y + v'z + w' = 0$$

l'équation de ce plan. Pour exprimer qu'un rayon y est contenu, on peut prendre les trois équations suivantes :

$$t'r + u's + v' = 0,$$
$$t'\rho + u'\sigma + w' = 0,$$
$$w's - v'\sigma - (r\sigma - s\rho)t' = 0,$$

dont chacune est une conséquence des deux autres. Entre ces équations et celle du complexe, éliminons les quantités $(r\sigma - s\rho)$, r et ρ. L'équation résultante

$$(12) \; (Bt' - Au' - Fv')s + (Dt' - Eu' + Fv')\sigma + Ct' - Av' - Ew' = 0$$

étant linéaire par rapport aux deux variables restantes s et σ, représente une ligne droite parallèle à OX, et coupant le plan YZ en un

point qui a pour coordonnées

$$(13)\quad \begin{cases} z' = \dfrac{Bt' - Au' - Fw'}{Dt' - Eu' - Fv'}, \\[2ex] y' = -\dfrac{Ct' - Av' - Ew'}{Dt' - Eu' + Fv'}. \end{cases}$$

D'où l'on voit que tous les rayons du complexe qui sont contenus dans le plan (11) coupent cette ligne droite, et par conséquent se rencontrent en un même point. Deux des coordonnées de ce point sont données par les équations (13); la troisième

$$(14)\qquad x' = \frac{Cu' - Bv' - Dw'}{Dt' - Eu' + Fv'}$$

s'obtient en introduisant dans l'équation du plan les valeurs précédentes de z' et y'.

Nous pouvons représenter le point qui correspond au plan donné (t', u', v', w') par son équation

$$(15)\quad \begin{cases} (Cu' - Bv' - Dw')t - (Ct' - Av' - Ew')u + (Bt' - Au' - Fw')v \\ \qquad\qquad + (Dt' - Eu' + Fv')w = 0, \end{cases}$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$(16)\quad \begin{cases} A(v'u - u'v) + B(t'v - v't) + C(u't - t'u + D(t'w - w't) \\ \qquad\qquad + E(w'u - u'w) + F(v'w - w'v) = 0. \end{cases}$$

19. Les équations (10) et (16) sont les plus générales qu'on puisse employer pour établir une correspondance mutuelle entre un point et un plan. L'équation (7) est donc l'équation la plus générale d'un complexe linéaire [*].

---

[*] Pour justifier cette assertion, il suffit d'avoir égard à la remarque suivante.

L'équation (10) doit représenter, si l'on regarde x, y, z comme variables, un plan passant par le point (x', y', z'); réciproquement, si l'on regarde x', y', z' comme variables, un plan passant par le point (x, y, z) et représenté par l'équation (10);

20. D'après la propriété caractéristique d'un complexe linéaire quelconque, le plan correspondant à un point donné est déterminé par deux des rayons qui passent par ce point, et, de même, le point correspondant à un plan donné est déterminé par deux quelconques des rayons situés dans ce plan.

Soient P, P' deux points quelconques de l'espace, p et p' les plans qui leur correspondent. Soient L la droite qui joint les deux points et A la droite d'intersection des deux plans. Par la droite L menons un plan quelconque qui coupe A au point Q, et joignons PQ, P'Q. Ces deux droites, passant par les points P et P' et se trouvant dans les plans p, p', sont des rayons du complexe. Le plan PQP', qui contient les deux rayons, correspond au point Q; donc tous les plans qui passent par un point quelconque de A se coupent suivant la droite L. Semblablement, tout plan mené par A coupe L au point qui lui correspond. D'après cela, nous dirons que les droites L, A sont *deux droites conjuguées par rapport au complexe linéaire*, ou simplement sont *deux droites conjuguées*. La relation qui existe entre deux droites conjuguées est réciproque; chacune d'elles peut être regardée comme un *axe* autour duquel un plan tourne, tandis que le point correspondant à ce plan décrit la seconde, et inversement, chacune de ces droites peut être regardée comme un rayon décrit par un point mobile, tandis que le plan correspondant à ce point tourne autour de l'autre.

Toute droite qui rencontre deux droites conjuguées est un rayon du complexe.

Toute droite de l'espace a une conjuguée.

Si un point se meut le long d'un rayon du complexe, le plan correspondant tourne autour de ce rayon lui-même, puisqu'il contient sans cesse tous les rayons passant par le point, donc en particulier le rayon même que ce point décrit. Et par conséquent chaque rayon du complexe représente deux droites conjuguées coïncidentes.

---

donc cette équation, linéaire par rapport à x, y, z d'une part, et à x', y', z' d'autre part, ne doit contenir que les termes

$$x-x',\quad y-y',\quad z-z',\quad yz'-y'z,\quad xz'-x'z,\quad xy'-x'y,$$

ce qu'il fallait démontrer.

21. On peut rattacher ces dernières propriétés au *principe de la réciprocité polaire*. En effet, l'équation générale (10), qui représente le plan correspondant à un point donné, ne change pas si l'on y permute entre elles les lettres x', y', z' et x, y, z. Donc, si nous adoptons les dénominations de *pôle* et de *plan polaire* pour indiquer un point et le plan qui lui correspond, nous pouvons dire que les plans polaires de tous les points d'un plan donné passent par le pôle de ce plan, et réciproquement, que les pôles de tous les plans menés par un point donné sont situés dans le plan polaire de ce point. Dans le cas particulier qui nous occupe, un plan contenant son propre pôle est déterminé par les pôles de deux plans quelconques passant par ce pôle; et pareillement un point, étant toujours situé dans son plan polaire, est déterminé par les plans polaires de deux quelconques des points de ce plan. La droite qui joint deux points de l'espace est *conjuguée* à la droite suivant laquelle se coupent les plans polaires de ces deux points. Si l'une des deux droites enveloppe une courbe plane, sa conjuguée décrit une surface conique, et le sommet du cône est situé dans le plan de la courbe. En général, si l'une des deux droites décrit une surface réglée, sa conjuguée décrit aussi une surface réglée, et quand l'une de ces deux surfaces devient un cône, l'autre dégénère en une courbe plane [*].

22. *Un point de l'espace étant donné, construire le plan qui contient tous les rayons du complexe passant par ce point.*

Toute droite qui s'appuie sur deux droites conjuguées est un rayon du complexe. Le plan cherché est donc déterminé par deux droites dont chacune, passant par le point donné, sera menée de manière à rencontrer les deux droites de deux systèmes conjugués donnés.

Un plan quelconque étant donné, construire le point vers lequel convergent tous les rayons du complexe situés dans ce plan.

Toute droite qui joint les deux points d'intersection de deux droites

---

[*] La *polarité réciproque*, de nature particulière, que nous rencontrons ici, a été remarquée pour la première fois par M. Mœbius, dans le tome X du *Journal de Crelle*, et développée plus tard par M. L.-F. Magnus dans son excellent ouvrage intitulé : *Sammlung von Aufgaben und Lehrsatzen*....

conjuguées par un même plan est un rayon du complexe. Il suffit donc, pour déterminer le point cherché, de connaître deux systèmes de droites conjuguées, et de joindre les points d'intersection de chacun d'eux par le plan proposé.

Remarquons enfin que toute droite, qui joint les deux points de rencontre de deux droites conjuguées par un plan, est un rayon du complexe qui converge vers le pôle de ce plan. De même, toute droite située à la fois dans deux plans menés par un même point de l'espace, et respectivement par deux droites conjuguées, est un rayon du complexe situé dans le plan polaire de ce point.

23. Après cette digression géométrique qui était naturellement indiquée, reprenons la marche analytique.

Si dans l'équation générale (9), qui représente le plan correspondant à un point donné (x', y', z'), on fait

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0,$$

on trouve

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{17}$$

pour l'équation du plan qui correspond à l'origine des coordonnées.

Si l'on y fait ensuite et successivement

$$\begin{aligned} z' &= \infty, \\ y' &= \infty, \\ x' &= \infty, \end{aligned}$$

la même équation devient

$$\left\{\begin{aligned} &C + Ex + Dy = 0, \\ &B + Fx - Dz = 0, \\ &A - Fy - Ez = 0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Ces trois équations représentent donc respectivement les plans correspondants aux points situés à l'infini sur les axes OZ, OY, OX.

En combinant chacune des équations (18) avec (17), on obtient les rayons conjugués aux axes coordonnés OZ, OY, OX, lesquels for-

ment un triangle dont les sommets tombent aux points correspondants dans les trois plans coordonnés XY, XZ, YX.

24. Si l'on fait

$$w' = \infty,$$

l'équation (15), qui représente le point correspondant à un plan donné (t', u', v', w'), devient

$$- \mathrm{D}t + \mathrm{E}u - \mathrm{F}v = 0;$$

elle indique que le point correspondant au plan situé à l'infini est lui-même situé à l'infini sur la droite que représentent les équations

$$(19) \qquad \frac{x}{\mathrm{D}} = - \frac{y}{\mathrm{E}} = \frac{z}{\mathrm{F}},$$

tandis que

$$\mathrm{D}x - \mathrm{E}y + \mathrm{F}z = 0$$

représente le plan qui lui est perpendiculaire, les axes étant supposés rectangulaires.

Nous donnerons à la droite (19) le nom de *droite caractéristique du complexe*, parce qu'elle a avec lui une relation nécessaire et invariable.

25. Si l'on fait successivement

$$t' = \infty,$$
$$u' = \infty,$$
$$v' = \infty,$$

on obtient les trois équations suivantes, qui représentent les points correspondants aux plans coordonnés YZ, XZ, XY, et situés dans ces plans respectifs :

$$(20) \qquad \begin{cases} \mathrm{C}u - \mathrm{B}v - \mathrm{D}w = 0, \\ \mathrm{C}t - \mathrm{A}v - \mathrm{E}w = 0, \\ \mathrm{B}t - \mathrm{A}u - \mathrm{F}w = 0. \end{cases}$$

Les coordonnées de ces points sont donc

$$(21)\qquad \begin{cases} x=0, & y=-\dfrac{C}{D}=y_t, & z=\dfrac{B}{D}=z_t, \\ y=0, & x=-\dfrac{C}{E}=x_u, & z=\dfrac{A}{E}=z_u, \\ z=0, & x=-\dfrac{B}{F}=x_v, & y=\dfrac{A}{F}=y_v, \end{cases}$$

d'où l'on déduit la relation

$$\frac{x_v y_t z_u}{x_u y_v z_t} = -1.$$

Si l'on pose $C=-1$, la ligne droite conjuguée à OZ, étant regardée comme un axe, peut être déterminée par ses quatre coordonnées

$$p=A,\quad q=B,\quad \varpi=D,\quad \varkappa=E.$$

Ces coordonnées sont donc quatre des constantes du complexe

$$Ar+Bs+D\sigma+E\rho+F(s\rho-s\sigma)=1.$$

La droite MN, conjuguée à OZ, ne change pas quelle que soit la valeur de F. Donc, si cette dernière équation devient linéaire en faisant $F=0$, le complexe est complétement déterminé par la seule ligne MN, conjuguée de OZ.

26. Le rapport des trois constantes desquelles dépend la direction caractéristique du complexe (19), savoir :

$$D:E:F,$$

ne change pas avec la position de l'origine, ni par conséquent si le complexe se meut parallèlement à lui-même. Mais ce rapport est altéré, si le complexe subit un mouvement de rotation et si la direction caractéristique change en même temps. L'une des trois constantes F, E, D devient nulle, si la caractéristique est située dans les plans XY, XZ, YZ; deux d'entre elles s'annulent, savoir : F et E, F et D ou E et D, si cette caractéristique coïncide avec les axes OX, OY ou OZ respectivement.

Dans cette dernière hypothèse, qui présente trois cas distincts, l'équation générale prend l'une des trois formes suivantes :

$$(22)\quad \begin{cases} Ar + Bs + C + D\sigma = 0, \\ Ar + Bs + C + E\rho = 0, \\ Ar + Bs + C + F(s\rho - r\sigma) = 0. \end{cases}$$

27. Le rapport des trois constantes

$$A:B:C$$

varie si le complexe se meut parallèlement à lui-même. Quand le plan correspondant au point O passe par l'un des axes OZ, OY, OX, l'une des trois constantes C, B, A devient nulle; quand ce plan se confond avec XY, XZ ou YZ, c'est-à-dire quand O est le point correspondant de XY, XZ ou YZ, deux des constantes s'annulent, savoir : A et B, ou A et C, ou enfin B et C, et l'équation générale du complexe devient

$$(23)\quad \begin{cases} D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) + C = 0, \\ D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) + Bs = 0, \\ D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) + Ar = 0, \end{cases}$$

28. Afin de représenter un complexe linéaire par les équations les plus simples possible, prenons l'un des plans coordonnés XY, XZ, YZ perpendiculaire à la direction caractéristique, et faisons passer les axes OZ, OY, OX par le point O correspondant à ce plan et qui y est situé. Les équations qui résultent de ces trois hypothèses sont

$$(23')\quad \begin{cases} F(s\rho - r\sigma) + C = 0, \\ Bs + E\rho = 0, \\ Ar + D\sigma = 0. \end{cases}$$

Les plans correspondant à tous les points d'une droite parallèle à la caractéristique sont parallèles entre eux; et réciproquement, le lieu des points correspondant à des plans parallèles est une droite parallèle à la caractéristique. D'où l'on conclut qu'il existe une droite fixe et

déterminée, dont les points correspondent aux plans qui lui sont perpendiculaires. Donc, en supposant les axes rectangulaires, on ne peut représenter un complexe linéaire que d'une seule manière par des équations ayant la forme des équations (23').

29. Pour obtenir, par exemple, la première de ces équations qui peut s'écrire

$$s\rho - s\sigma = k,$$

en y remplaçant

$$-\frac{C}{F} \text{ par } k,$$

il suffit de prendre la droite fixe pour l'axe des z. D'ailleurs, comme on n'a fait aucune supposition relativement à la position de l'origine O sur OZ, ni relativement aux directions des axes OX, OY, situés dans le plan XY perpendiculaire à OZ, cette équation demeure invariable, soit qu'on transporte le système des coordonnées parallèlement à lui-même le long de OZ, soit qu'on le fasse tourner autour de cette droite. En d'autres termes,

Un complexe linéaire de rayons reste invariable, quand on le transporte parallèlement à lui-même le long d'une certaine droite fixe, ou qu'on le fait tourner autour de cette droite.

Cette droite fixe peut être appelée l'*axe de rotation* ou plus brièvement l'*axe* du complexe.

30. On peut donner diverses interprétations géométriques aux trois équations (23'), dont chacune exprime une propriété caractéristique d'un complexe linéaire de rayons.

Deux plans XZ, YZ qui se coupent suivant OZ étant donnés, on peut déterminer les rayons de l'espace, soit par leurs projections sur ces plans, soit par les points où les rayons les rencontrent. Dans le premier cas, si l'on mène un troisième plan qui coupe à angle droit les plans XZ, YZ suivant OX et OY, il existe deux plans parallèles entre eux LMN, L'M'N' qui passent respectivement par les projections données LN, M'N' et qui rencontrent les axes OZ, OY, OX aux points N et N', M et M', L et L'. Dans le second cas, soient U et V les points d'intersection du rayon avec les plans XZ et YZ, et U', V' les

projections de ces points sur les plans YZ, XZ. En conséquence, U'V, UV' et U'V' sont les projections de UV sur les plans XZ, YZ et sur OZ. Si, dans le premier cas, on a

$$\frac{LL'.MM'}{NN'} = k,$$

et si, dans le second cas, on a

$$\frac{UU'.VV'}{U'V'} = k,$$

tous les rayons ainsi déterminés constituent un complexe linéaire représenté par l'équation

$$s\rho - r\sigma = k,$$

et dont l'axe est OZ.

Si $k = 0$, le complexe linéaire est d'espèce particulière : tous ses rayons rencontrent l'axe OZ.

31. On peut parvenir directement aux résultats du n° **29**. Soit x', y', z' un point de l'espace; d'après l'équation (10), le plan correspondant à ce point dans le complexe qui a pour équation

$$(24) \qquad s\rho - r\sigma = k,$$

est représenté par

$$(25) \qquad y'x - x'y = k(z - z').$$

Si l'on fait $x' = 0, y' = 0$, cette équation montre que tous les plans correspondant aux points de l'axe de rotation OZ sont perpendiculaires à cet axe (ou parallèles à XY, si les coordonnées sont obliques).

Si le point est situé dans le plan XY, il faut faire $Z' = 0$, d'où

$$y'x - x'y = kz;$$

et conséquemment le plan correspondant passe par le point O. Appelons λ l'angle de ce plan avec l'axe de rotation, on a

$$\cos\lambda = \frac{k}{\sqrt{y'^2 + x'^2 + k^2}},$$

d'où

$$(26)\qquad y'^2 + x'^2 = k^2 \tang^2 \lambda.$$

Et par conséquent :

Des droites parallèles à l'axe du complexe et situées à égale distance de cet axe sont rencontrées sous le même angle par les plans qui correspondent à leurs points respectifs.

32. De l'équation (26) découlent les conséquences suivantes.

Le plan p, correspondant à un point P, passe par OP, O étant la projection du point P sur OZ. Faisons tourner de 90 degrés, autour de l'axe OZ, le plan p et la perpendiculaire OM abaissée du point O sur ce plan, et désignons-les par p' et OM′ dans leur nouvelle position. La projection de OP sur OM′ est constante, et pareillement la perpendiculaire abaissée du point P sur p'.

Ensuite, k étant donné, on peut déterminer λ et par suite construire le plan correspondant à un point donné, et réciproquement on peut déterminer OP et par conséquent construire le point correspondant à un plan donné.

Quant à l'équation (25), elle donne lieu à l'interprétation suivante : Par le point P, menez un plan XY perpendiculaire à OZ. Dans le plan p correspondant à ce point, prenez un point R dont la projection sur le plan XY soit R′. Le double de l'aire du triangle POR′ divisée par R′R est constant et égal à k.

33. Un complexe linéaire dépend de cinq constantes, dont quatre servent à fixer la position de son axe dans l'espace. Dans le cas des équations (23′), cet axe se confondant avec l'un des axes coordonnés, il ne reste plus qu'une seule constante. La position de l'axe du complexe et la valeur de la cinquième constante peuvent être déterminées en fonction des cinq paramètres indépendants de l'équation générale (7).

Pour cela, on peut se servir de la transformation des coordonnées. Sans entrer ici dans tous les calculs, qu'on trouvera plus développés dans le Mémoire original, nous ferons simplement connaître les for-

mules qui résultent de cette transformation et dont nous aurons à faire usage ci-après.

34.

$$x = rz + \rho,$$
$$y = sz + \sigma$$

étant les équations d'un rayon dans un système de coordonnées (x, y, z),

$$x' = r'z' + \rho'$$

et

$$y' = sz' + \rho'$$

étant ses équations dans un autre système (x', y', z'), on a entre les variables r, s, ρ, σ et r', s', ρ', σ', les relations suivantes :

1° Si les axes coordonnés demeurent parallèles, l'origine se transportant simplement au point (x^0, y^0, z^0), on a

$$(26)\qquad \begin{cases} r = r' \\ s = s', \\ \rho = \rho' + x^0 - rz^0, \\ \sigma = \sigma' + y^0 - sz^0, \end{cases}$$

$$(27)\qquad s\rho - r\sigma = (s'\rho' - r'\sigma') + x^0 s - y^0 r,$$

si $x^0 = 0$ et $y^0 = 0$; donc, si l'origine se déplace le long de OZ, l'expression $(s\rho - r\sigma)$ ne change pas (**29**).

2° Si OX et OY tournent autour de OZ, faisant dans leurs nouvelles positions des angles α, α' avec OX, on a, en posant $\alpha' - \alpha = \theta$,

$$(28)\qquad \begin{cases} r = r' \cos\alpha + s' \cos\alpha', \\ \rho = \rho' \cos\alpha + \sigma' \cos\alpha', \\ s = r' \sin\alpha + s' \sin\alpha', \\ \sigma = \rho' \sin\alpha + \sigma' \sin\alpha', \end{cases}$$

$$(29)\qquad (s\rho - r\sigma) = (s'\rho' - r'\sigma') \sin\theta,$$

d'où l'on voit que $(s\rho - r\sigma)$ ne change pas si $\theta = \frac{\pi}{2}$ (**29**).

3° Si OX et OZ tournent autour de OY, qu'on appelle α' et α les angles que ces axes, dans leur nouvelle position, font avec OZ, et qu'on pose, comme ci-dessus, $\alpha' - \alpha = \theta$, on trouve

$$(30)\quad \begin{cases} r' = -\dfrac{\sin\alpha - r\cos\alpha}{\cos\alpha + r\sin\alpha}, \\[2ex] \rho' = \dfrac{\rho}{\cos\alpha + r\sin\alpha}, \\[2ex] s' = -\dfrac{s}{\cos\alpha + r\sin\alpha}, \\[2ex] \sigma' = -\dfrac{(s\rho - r\sigma)\sin\alpha - \sigma\cos\alpha}{\cos\alpha + r\sin\alpha}, \end{cases}$$

$$(31)\quad (s'\rho' - r'\sigma') = \frac{(s\rho - r\sigma)\cos\alpha - \sigma\sin\alpha}{\cos\alpha + r\sin\alpha};$$

$$(32)\quad \frac{\rho'}{s'} = \frac{\rho}{s},$$

et inversement

$$(33)\quad \begin{cases} r = \dfrac{\sin\alpha + r'\cos\alpha}{\cos\alpha - r'\sin\alpha}, \\[2ex] \rho = \dfrac{\rho'}{\cos\alpha - r'\sin\alpha}, \\[2ex] s = -\dfrac{s'}{\cos\alpha - r'\sin\alpha}, \\[2ex] \sigma = \dfrac{(s'\rho' - r'\sigma')\sin\alpha + \sigma'\cos\alpha}{\cos\alpha - r'\sin\alpha}; \end{cases}$$

$$(34)\quad s\rho - r\sigma = \frac{(s'\rho' - r'\sigma')\cos\alpha - \sigma\sin\alpha}{\cos\alpha - r'\sin\alpha}.$$

35. Cela posé, l'équation générale d'un complexe linéaire (7)

$$Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) = 0$$

devient, quand on transporte l'origine au point (x^0, y^0, z^0) (26),

$$(A - Fy^0 - Ez^0)r + (B + Fx^0 - Dz^0)s + (C + Ex^0 + Dz^0) + D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) = 0.$$

Si

$$\frac{x^0}{D} = -\frac{y^0}{E} = \frac{z^0}{F},$$

l'équation primitive ne change pas. Donc le complexe reste le même s'il se meut parallèlement à lui-même, le long de la direction indiquée par ces dernières relations. Si l'on appelle ξ, η, ζ les angles que cette direction fait avec les axes OX, OY, OZ, on a

(35) $$\frac{\cos\xi}{D} = -\frac{\cos\eta}{E} = \frac{\cos\zeta}{F}.$$

36. Pour amener OZ à coïncider avec la droite OM, qui a la direction déterminée ci-dessus, il faut d'abord faire tourner le système des coordonnées autour de OZ, d'une quantité angulaire égale à α, de manière à amener le plan ZX à contenir la droite OM. On a donc

$$\cos\alpha = \frac{\cos\xi}{\sin\zeta},$$

d'où

$$\operatorname{tang}^2\alpha = \frac{1 - \cos^2\zeta - \cos^2\xi}{\cos^2\xi} = \frac{\cos^2\eta}{\cos^2\xi} = \frac{E^2}{D^2}.$$

En vertu des formules (28), l'équation du complexe (7) devient

$$(A\cos\alpha + B\sin\alpha)r' - (A\sin\alpha - B\cos\alpha)\sigma' + (E\cos\alpha + D\sin\alpha)\rho' \\ - (E\sin\alpha - D\cos\alpha)\sigma' + C + F(s'\rho' - r'\sigma') = 0,$$

qu'on peut écrire ainsi :

(36) $$A'r + B's + C' + D'\sigma + F'(s\rho - r\sigma) = 0,$$

en ôtant les accents des coordonnées nouvelles et en posant

(37) $$\begin{cases} E\cos\alpha + D\sin\alpha = 0, \\ A' = (AD - BE)\dfrac{\cos\alpha}{D}, \quad B' = (AD + BE)\dfrac{\cos\alpha}{D}, \\ D' = (D^2 + E^2)\dfrac{\cos\alpha}{D}, \qquad C' = C, \quad F' = F. \end{cases}$$

37. Il s'agit maintenant de faire prendre à OZ, dans le plan ZX, la direction OM; il faut pour cela faire usage des formules (33), après y avoir remplacé α par ζ. L'équation (36) devient de la sorte

$$\begin{aligned} &A'(\sin\zeta + r'\cos\zeta) - B's' + C'(\cos\zeta - r'\sin\zeta) \\ &\quad + D'[(s'\rho' - r'\sigma')\sin\zeta + \sigma'\cos\zeta] + F'[(s'\rho' - r'\sigma')\cos\zeta - \sigma'\sin\zeta] = 0, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$A''r + B''s + C'' + F''(s\rho - r\sigma) = 0, \tag{37'}$$

en omettant les accents des coordonnées nouvelles et en posant

$$\left\{\begin{aligned} &D'\cos\zeta = F'\sin\zeta, \\ &A'' = (A'F' - C'D')\frac{\cos\zeta}{F'}, \\ &B'' = -B', \\ &C'' = (A'F' + A'D')\frac{\cos\zeta}{F'}, \\ &F'' = (D'^2 + F'^2)\frac{\cos\zeta}{F'}. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

38. Enfin il faut transporter l'origine dans le plan XY, au point dont les coordonnées sont x^0 et y^0. L'équation du complexe, en y remplaçant ρ et σ par $\rho + x^0$ et $\sigma + y^0$, devient donc

$$(A'' - F''y^0)r + (B'' + F''x^0)s + C'' + F''(s\rho - r\sigma) = 0,$$

qui se réduit à

$$(s\rho - r\sigma) = -\frac{C''}{F''} = k, \tag{39}$$

en posant

$$y^0 = \frac{A''}{F''}, \quad x^0 = -\frac{B''}{F''}.$$

39. Par des substitutions successives, on trouve aisément

$$k = -\frac{C''}{F''} = -\frac{C'F' + A'D'}{D'^2 + F'^2} = -\frac{CF + (AD - BE)(D^2 + E^2)\frac{\cos^2\alpha}{D^2}}{(D^2 + E^2)^2\frac{\cos^2\alpha}{D^2} + F^2};$$

et enfin, en observant que

$$\cos^2\alpha = \frac{D^2}{D^2 + E^2},$$

on obtient l'expression symétrique

$$(40) \qquad k = -\frac{AD - BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2}.$$

Pour changer OZ et OX l'un dans l'autre, il faut employer les formules (30) et (31), en y faisant $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Au moyen de la dernière de ces deux formules, l'équation (39) du complexe linéaire se transforme immédiatement dans la suivante :

$$(41) \qquad \sigma = kr,$$

la constante k étant la même que ci-dessus.

Puis, en échangeant OY et OX, il vient

$$(42) \qquad \rho = ks.$$

40. Si k est nul, le complexe est d'espèce particulière : tous ses rayons rencontrent une droite fixe. Le complexe étant représenté par l'équation générale (7)

$$Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) = 0,$$

ce cas particulier a pour critérium la condition ci-après :

$$(43) \qquad AD - BE + CF = 0.$$

41. En éliminant successivement de l'équation générale (7) σ, ρ et $(s\rho - r\sigma)$, à l'aide des équations

$$x = rz + \rho,$$
$$y = sz + \sigma,$$
$$sx - ry = s\rho - r\sigma,$$

on obtient la suivante :

$$(A - Fy - Ez)r + (B + Fx - Dz)s + (C + Dy + Ex) = 0.$$

S'il existe un point (x, y, z) où concourent tous les rayons du complexe, ce point sera déterminé par le système des trois équations

$$(44)\qquad \begin{cases} A - Fy - Ez = 0, \\ B + Fx - Dz = 0, \\ C + Ex + Dy = 0, \end{cases}$$

qui ne peuvent coexister qu'autant que la relation (43) est elle-même satisfaite.

Quand l'équation (43) a lieu, le lieu des points de concours de tous les rayons du complexe est une ligne droite, dont les projections sont représentées par les deux dernières des équations (44).

42. Tous les rayons qui appartiennent aux deux complexes linéaires

$$(45)\qquad \begin{cases} \Omega \equiv Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) = 0, \\ \Omega' \equiv A'r + B's + C' + D'\sigma + E'\rho + F'(s\rho - r\sigma) = 0 \end{cases}$$

forment *une congruence linéaire représentée par le système de ces deux équations.*

Relativement à la détermination de la congruence, chacun des deux complexes

$$\Omega = 0, \quad \Omega' = 0$$

peut être remplacé par un autre quelconque de la forme

$$(46)\qquad \Omega + \mu\Omega' = 0,$$

μ étant un coefficient arbitraire.

Dans chacun des deux complexes qui déterminent la congruence, il y a un plan correspondant à chaque point de l'espace et contenant les rayons émergeant de ce point. Deux plans correspondant au même point se coupent suivant un seul rayon, qui appartient à la fois aux deux complexes, c'est-à-dire à la congruence. Donc :

Dans une congruence, chaque rayon correspond à un point de l'espace. Tous les plans qui correspondent à un même point, dans tous les complexes représentés par (46), se coupent suivant une seule et même droite; c'est le rayon correspondant de la congruence.

Réciproquement, il y a dans chacun des complexes (46) un point correspondant à un plan donné, où viennent concourir tous les rayons situés dans ce plan. Si l'on prend deux de ces complexes, on aura donc deux points; la droite qui les joint est le seul rayon qui soit situé dans le plan donné, relativement aux deux complexes, donc qui appartienne à la congruence. Nous dirons que c'est *le rayon de la congruence correspondant au plan donné.*

Ainsi, à chaque point comme à chaque plan, il ne correspond qu'un seul rayon. Jamais deux rayons de la congruence ne se rencontrent, c'est-à-dire ne sont situés dans un même plan.

43. Soient AB une droite donnée; A'B', A''B'' ses deux conjuguées par rapport aux complexes Ω, Ω'; C un point pris arbitrairement sur AB. Chaque rayon émanant du point C appartient à Ω, s'il est compris dans le plan A'B'C, et à Ω' s'il est compris dans le plan A''B''C. Donc l'intersection des deux plans A'B'C, A''B''C, c'est-à-dire la droite qui, partant du point C, s'appuie sur les deux conjuguées de AB, est le rayon de la congruence correspondant au point C. Faisons mouvoir le point C le long de AB, tous les rayons de la congruence obtenus ainsi sont les génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde, dont les droites AB, A'B', A''B'' sont des génératrices de deuxième mode de génération. Si l'on remplace Ω et Ω' par deux autres complexes pris arbitrairement parmi ceux en nombre infini que représente la formule (46), les deux droites conjuguées seront remplacées par d'autres, mais qui seront encore rencontrées par les rayons de la congruence émanant de AB. Donc :

Les lignes droites conjuguées à une droite donnée, par rapport à tous les complexes qui se coupent mutuellement suivant une congruence linéaire donnée, sont les génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde, tandis que les génératrices du second mode de génération sont les rayons de la congruence qui rencontrent la droite donnée.

44. Si un point se meut le long d'une droite dans l'espace, le rayon

qui lui correspond décrit donc en général un hyperboloïde. Nous pouvons dire que cet hyperboloïde est le lieu du rayon correspondant à un plan mobile autour de la droite donnée comme axe. Si le rayon est le même dans les deux cas, le point où il rencontre la droite AB est un point de la surface, et le plan qui contient à la fois ce rayon et la droite AB est le plan tangent en ce point à la surface.

45. L'hyperboloïde engendré par un rayon d'une congruence linéaire, dont le point correspondant se meut le long de AB, varie quand cette droite tourne autour d'un de ses points C. Tous ces hyperboloïdes contiennent le rayon correspondant à C, mais il n'y a pas d'autre rayon que celui-là qui soit commun à deux hyperboloïdes. Si AB décrit un plan et tourne de 180 degrés autour du point, il passe par chaque point de l'espace un rayon d'un certain hyperboloïde. Donc une congruence linéaire peut être engendrée par un hyperboloïde variable qui tourne autour d'une de ses génératrices.

Et pareillement, un complexe linéaire peut être engendré par le mouvement de rotation d'une congruence variable.

46. Tandis que, dans chacun des deux complexes Ω, Ω', il existe une droite fixe, savoir l'axe du complexe, autour de laquelle ses rayons sont distribués symétriquement, il existe, dans toute congruence linéaire, un plan caractéristique parallèle aux deux axes des deux complexes et une direction caractéristique perpendiculaire à ce plan.

Le plan caractéristique, si on le conduit par l'origine, peut être représenté par l'équation

$$ax + by + cz = 0.$$

Les deux droites, menées du point O parallèlement aux axes des deux complexes, sont représentées par les équations

$$\frac{x}{D} = -\frac{y}{E} = \frac{z}{F},$$
$$\frac{x}{D'} = -\frac{y}{E'} = \frac{z}{F'}.$$

Ces droites étant comprises dans le plan caractéristique, nous avons,

pour déterminer les constantes de l'équation du plan, les relations

$$aD + bE + cF = 0,$$
$$aD' + bE' + cF' = 0,$$

d'ou

$$(D'E - E'D)b + (D'F - F'D)c = 0,$$
$$(D'E - E'D)a + (E'F - F'E)c = 0.$$

En conséquence, l'équation du plan dont il s'agit devient

$$(47)\quad (E'F - F'E)x - (D'F - F'D)y + (D'E - E'D)z = 0,$$

et les deux équations de la droite qui lui est perpendiculaire sont

$$(48)\quad \frac{x}{E'F - F'E} = \frac{-y}{D'F - F'D} = \frac{z}{D'E - E'D}.$$

47. Si l'on donne à OZ la direction caractéristique, les deux complexes (45) seront représentés par des équations linéaires de la forme

$$(49)\quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &\equiv Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho = 0, \\ \Omega' &\equiv A'r + B's + C' + D'\sigma + E'\rho = 0, \end{aligned} \right.$$

l'origine restant arbitraire, ainsi que les directions de OX et OY perpendiculaires à OZ.

On peut ensuite faire mouvoir OZ parallèlement à elle-même, ce qui revient à remplacer ρ et σ par $(\rho + x^0)$ et $(\sigma + y^0)$, x^0 et y^0 étant les coordonnées de la nouvelle origine. Si en particulier on prend

$$C + Dy^0 + Ex^0 = 0,$$
$$C' + D'y^0 + E'x^0 = 0,$$

d'où

$$x^0 = -\frac{C'D - D'C}{D'E - E'D},$$
$$y^0 = \frac{C'E - E'C}{D'E - E'D},$$

C et C′ disparaissent et les équations des complexes deviennent

$$(50)\quad \begin{cases} \Omega \equiv A r + B s + D\sigma + E\rho = 0, \\ \Omega' \equiv A' r + B' s + D'\sigma + E'\rho = 0. \end{cases}$$

Dans cette nouvelle position, OZ est une droite entièrement déterminée qu'on peut appeler l'*axe de la congruence*. Il est aisé de voir qu'elle coupe à angle droit les deux axes de rotation des complexes Ω, Ω', et par conséquent aussi les axes de tous les complexes représentés par l'équation (46).

48. Les plans qui, dans les deux complexes, correspondent à un point donné (x', y', z'), sont représentés par les équations

$$(51)\quad \begin{cases} (A - Ez')x + (B - Dz')y + (Ex' + Dy')z = Ax' + By', \\ (A' - E'z')x + (B' - D'z')y + (E'x' + D'y')z = A'x' + B'y'. \end{cases}$$

Pour que ces deux plans correspondants se confondent, il faut qu'on ait les relations

$$(52)\quad \begin{cases} (A - Ez') : (B - Dz') : (Ex' + Dy') : (Ax' + By') \\ = (A' - E'z') : (B' - D'z') : (E'x' + D'y') : (A'x' + B'y'). \end{cases}$$

Puisque les deux plans passent par le point donné, il suffit de deux équations, tirées des relations précédentes, pour déterminer le lieu des points qui ont le même plan correspondant dans les deux complexes. On trouve ainsi, en supprimant les accents, les six équations suivantes, qui sont telles que quatre quelconques d'entre elles sont une conséquence des deux autres :

$$(53)\quad \begin{cases} (D'E - E'D)z^2 - [(B'E - E'B) - (A'D - D'A)]z \\ \qquad\qquad - (A'B - B'A) = 0, \end{cases}$$

$$(54)\quad \begin{cases} (B'D - D'B)y^2 + [(B'E - E'B) + (A'D - DA')]xy \\ \qquad\qquad + (A'E - EA')x^2 = 0, \end{cases}$$

$$(55)\quad (A'D - D'A)y + (A'E - E'A)x + (D'E - E'D)zy = 0,$$

$$(56)\quad (B'D - D'B)y + (B'E - E'B)x - (D'E - E'D)xz = 0,$$

$$(57)\quad (A'B - B'A)y + (A'E - E'A)xz + (B'E - E'B)yz = 0,$$

$$(58)\quad (A'B - B'A)x - (A'D - D'A)xz - (B'D - D'B)xz = 0.$$

Remarquons, en passant, qu'une équation qui est, comme les précédentes, homogène par rapport aux quantités $(A'B - B'A)$, $(A'C - C'A), \ldots$, n'est pas altérée quand les complexes Ω, Ω' sont remplacés par deux quelconques des complexes $(\Omega + \mu\Omega')$.

49. Les deux premières de ces six équations montrent que le lieu cherché est le système de deux droites qui rencontrent l'axe OZ, et qui sont situées dans les deux plans parallèles à XY que détermine l'équation (53); la direction qu'elles prennent dans ces plans est déterminée par l'équation (54). Nous appellerons ces droites les *directrices*, et le plan caractéristique qui leur est parallèle et en est équidistant, prendra le nom de *plan central de la congruence linéaire*. Les deux directrices coupent à angle droit l'axe de la congruence, comme le font les axes de tous les complexes.

50. On peut partager les congruences linéaires en deux classes, selon que leurs directrices sont réelles ou imaginaires. Dans un cas particulier, les deux directrices se confondent. Enfin, il peut arriver que l'une d'elles soit à l'infini.

51. Si les directrices sont réelles, et si le plan XY passe par l'une d'elles, on a, d'après (53), la condition

$$(59)\qquad A'B - B'A = 0.$$

Pour déterminer la direction que cette directrice occupe dans le plan XY, l'équation (55) donne, en y faisant $Z = 0$,

$$(60)\qquad (A'D - D'A)y + (A'E - E'A)x = 0.$$

Parmi les complexes, en nombre infini, que contient la congruence, et qui sont tous représentés par l'équation

$$\Omega + \mu\Omega' = 0,$$

il y en a un qui mérite une attention particulière : c'est celui qu'on obtient en faisant

$$\mu = -\frac{A}{A'} = -\frac{B}{B'}$$

dans les équations (50). On trouve ainsi

$$(61) \qquad (A'D - D'A)\sigma + (A'E - E'A)\rho = 0.$$

Tous les rayons de ce complexe, et par conséquent tous les rayons de la congruence, rencontrent une droite fixe, située dans le plan XY et représentée par l'équation (60), en y remplaçant ρ et σ par x et y. Cette droite est donc l'axe du complexe et l'une des deux directrices de la congruence. On prouve de la même manière que tous les rayons de la congruence rencontrent l'autre directrice. Donc :

Tous les rayons d'une congruence rencontrent ses deux directrices. Quand les deux directrices sont réelles et données, on peut mener immédiatement, par un point quelconque, le seul rayon de la congruence qui y passe.

52. Dans la classe particulière de congruences, pour lesquelles on a

$$(62) \qquad D'E - E'D = 0,$$

l'une des deux directrices est située à l'infini. Si l'on fait en même temps

$$A'B - B'A = 0,$$

l'autre directrice, actuellement située dans le plan XY, se détermine comme ci-dessus par l'équation (60); mais, parmi les complexes

$$\Omega + \mu\Omega' = 0,$$

outre celui (61) qui a la directrice pour axe, il y en a un autre représenté par

$$D\Omega' - D'\Omega \equiv (A'D - D'A)r + (B'D - D'B)s = 0,$$

dont les rayons sont parallèles à un même plan. Son équation peut être transformée en celle-ci :

$$(63) \qquad A r + B s = 0,$$

et, par suite, l'équation du plan devient

$$A x + B y = 0.$$

Donc, dans ce cas particulier, tous les rayons de la congruence rencontrent son unique directrice et sont parallèles à un même plan.

53. Des considérations qui précèdent, on conclut que, parmi tous les complexes qui se coupent suivant une congruence linéaire, et qui ont pour équation générale

$$(64) \qquad \Omega + \mu\Omega' = 0,$$

il y en a généralement deux, d'une espèce particulière, dont les rayons rencontrent leurs axes. Ces axes, directrices de la congruence, sont deux droites conjuguées par rapport à tous les complexes (64).

En général, il n'y a qu'un seul rayon de la congruence qui passe par un point donné, et il n'y en a qu'un qui soit situé dans un plan donné. Mais chacune des deux directrices peut être regardée comme étant le lieu des points, de chacun desquels émane une infinité de rayons situés dans un même plan passant par l'autre directrice. On peut également la regarder comme l'enveloppe de plans, dont chacun contient une infinité de rayons dirigés tous vers un même point de l'autre directrice.

54. Deux complexes quelconques Ω, Ω' peuvent toujours être représentés par des équations dépendant uniquement de la position de leurs axes et de la valeur de leurs constantes. Soient Δ la plus courte distance des deux axes et θ l'angle formé par leurs directions.

Supposons que OZ coupe à angle droit les axes des deux complexes, et soient OX l'axe du premier complexe et k sa constante. L'équation du complexe sera

$$\sigma = k r.$$

Si l'on fait tourner l'axe OY autour du point O jusqu'à ce que, dans

la nouvelle position, l'angle Y'OX devienne égal à θ, le plan ZOY' passera par l'axe du second complexe, et l'équation précédente devient

$$\sigma' \sin\theta = kr' + ks' \cos\theta,$$

en y faisant

$$\sigma = \sigma' \sin\theta \quad \text{et} \quad r = r' + s' \cos\theta.$$

L'axe du second complexe Ω' rencontre OZ en un point O', OO' étant Δ. O' peut être pris pour l'origine des nouvelles coordonnées, OY et OZ étant remplacés par O'Y'', qui se confond avec l'axe de Ω', et par O'X'' perpendiculaire à ŻY''; alors l'équation du second complexe devient

$$\rho'' = k' s'',$$

ρ'' et σ' étant les nouvelles coordonnées radiales et k' la constante du complexe. Actuellement, pour rendre O'X'' parallèle à OX', il faut faire tourner cet axe autour de O' et l'amener à une position O'X''' telle, que l'angle Y'''O'X'' soit égal à θ. Donc, en posant

$$\rho'' = \rho''' \sin\theta,$$
$$s'' = r''' \cos\theta + s''',$$

l'équation du complexe se trouve transformée dans la suivante :

$$\rho''' \sin\theta = k' r''' \cos\theta + k' s'''.$$

Enfin, si l'on porte l'origine de O' en O, ρ''' devient $\rho^{\text{iv}} + \Delta r'''$, d'où

$$\rho''' \sin\theta = (k' \cos\theta + \Delta \sin\theta) r''' + k' s'.$$

Supprimant les accents, les deux complexes Ω, Ω' rapportés aux mêmes axes coordonnés OX, OY, OZ, dont les deux derniers font entre eux un angle θ, sont représentés par les équations

$$(65) \qquad \begin{cases} \sigma \sin\theta = kr + k \cos\theta . s, \\ \rho \sin\theta = (k' \cos\theta + \Delta \sin\theta) r + ks. \end{cases}$$

55. Pour déterminer les directrices de la congruence représentée

par le système des deux équations (65), posons

$$A = k,\qquad B = k\cos\theta,\quad D = -\sin\theta,\quad E = 0,$$
$$A' = k'\cos\theta + \Delta\sin\theta,\quad B' = k',\qquad D' = 0,\qquad E' = -\sin\theta;$$

les équations (53) et (54) se transforment dans les suivantes:

(66) $$\left\{\begin{aligned} 0 = (z\sin\theta)^2 &- [(k+k')\cos\theta + \Delta\sin\theta]\, z\sin\theta\\ &+ (kk'\sin^2\theta - \Delta k\sin\theta\cos\theta),\end{aligned}\right.$$

(67) $$0 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{(k-k')\cos\theta - \Delta\sin\theta}{k'}\cdot\frac{y}{x} - \frac{k}{k'}.$$

Désignons les racines de ces équations par $z'\sin\theta$, $z''\sin\theta$ et $\left(\frac{y}{x}\right)'$, $\left(\frac{y}{x}\right)''$, nous aurons

$$z' + z'' = \frac{(k+k')\cos\theta + \Delta\sin\theta}{\sin\theta}.$$

$$(z'-z'')^2 = \frac{-4kk' + [(2k+k')\cos\theta - \Delta\sin\theta]^2}{\sin^2\theta},$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)' + \left(\frac{y}{x}\right)'' = \frac{(k-k')\cos\theta - \Delta\sin\theta}{k'},$$

$$\left[\left(\frac{y}{x}\right)' - \left(\frac{y}{x}\right)''\right]^2 = \frac{4kk' + [(k-k')\cos\theta - \Delta\sin\theta]^2}{k'^2}.$$

Les racines de ces équations sont à la fois réelles, ou imaginaires, ou égales. Dans ce dernier cas, on a

$$(k-k')\cos\theta - \Delta\sin\theta = 2\sqrt{-kk'},$$

d'où

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \left(\frac{y}{x}\right)'' = \sqrt{-\frac{k}{k'}}.$$

Le plan central de la congruence a pour équation

(68) $$z = \frac{(k+k')\cos\theta - \Delta\sin\theta}{2\sin\theta}.$$

Cette équation donne, dans deux cas particuliers,

$$z = \frac{1}{2}\Delta,$$

savoir, quand $\theta = \frac{1}{2}\pi$ et quand $k + k' = 0$.

Donc les axes de deux complexes, choisis parmi ceux qui se coupent suivant une congruence donnée, sont à égale distance de son plan central, si leurs directions sont rectangulaires ou si les constantes des deux complexes sont égales et de signes contraires.

56. Sans entrer dans de plus longs détails au sujet des résultats obtenus ci-dessus, nous allons nous occuper en dernier lieu du problème inverse, savoir : une congruence étant donnée par ses deux directrices, déterminer les complexes dont elle est l'intersection commune. Si les coordonnées sont rectangulaires, les deux directrices peuvent être représentées par les systèmes d'équations suivants

$$y - ax = 0, \quad z = \beta,$$
$$y + ax = 0, \quad z = -\beta.$$

Ces directrices sont les axes de deux complexes, qui jouent un rôle à part parmi tous les autres. Si on les fait mouvoir parallèlement à eux-mêmes, de manière à amener leurs axes dans le plan XY, ces deux complexes auront pour équations respectives

$$\sigma - a\rho = 0,$$
$$\sigma + a\rho = 0,$$

et par conséquent, si on les ramène à leur position primitive, ils ont pour équations

$$\sigma - a\rho + \beta s - \beta a r = 0,$$
$$\sigma + a\rho - \beta s - \beta a r = 0.$$

Ajoutant ces équations, après avoir multiplié la seconde par un coefficient indéterminé μ, il vient

$$(1 + \mu)\sigma - (1 - \mu)a\rho + (1 - \mu)\beta s - (1 + \mu)\beta a r = 0,$$

et si l'on pose

$$\frac{1-\mu}{1+\mu}=\lambda,$$

(69) $$\sigma-\lambda a\rho+\lambda\beta s-\beta ar=0.$$

Cette équation, si l'on y fait varier λ, peut représenter tous les complexes qui se coupent suivant la congruence donnée. Leurs axes sont parallèles à XY et rencontrent OZ. Les équations (19) et (40) permettent de déterminer immédiatement la direction de leurs axes et leurs constantes. Mais on peut atteindre le même résultat en suivant la marche suivante, qui fait connaître en outre la position de ces axes dans l'espace.

Faisons tourner OX et OY d'un angle ω autour de OZ. A l'aide de la formule (34), dans laquelle il suffit de mettre ω au lieu de α, l'équation (69) devient

$$\begin{aligned}0=&(\cos\omega+\lambda a\sin\omega)\sigma'+(\sin\omega-\lambda a\cos\omega)\rho'\\&+(\lambda\cos\omega+a\sin\omega)\beta s'+(\lambda\sin\omega-a\cos\omega)\beta r',\end{aligned}$$

et, si l'on fait

(70) $$\operatorname{tang}\omega=\lambda a,$$

il vient

$$(1+\operatorname{tang}^2\omega)\sigma'+(\lambda\operatorname{tang}\omega-a)\beta r'+(\lambda+a\operatorname{tang}\omega)\beta s'=0.$$

Enfin, si l'on déplace le système des coordonnées parallèlement à lui-même, de manière que l'origine, glissant le long de OZ, vienne se placer au point z^0, on trouve

$$\begin{aligned}&(1+\operatorname{tang}^2\omega)\sigma'+(\lambda\operatorname{tang}\omega-a)\beta r'\\&+(\lambda+a\operatorname{tang}\omega)\beta s'-(1+\operatorname{tang}^2\omega)z^0 r'=0,\end{aligned}$$

qui, en posant

(71) $$z^0=\frac{\lambda+a\operatorname{tang}\omega}{1+\operatorname{tang}^2\omega}\cdot\beta,$$

devient

$$\sigma' = -\frac{\lambda \operatorname{tang} \omega - a}{1 + \operatorname{tang}^2 \omega} \cdot \beta r' = k r'. \tag{72}$$

Les valeurs de $\operatorname{tang} \omega$, z^0 et k demeurent réelles quand les deux directrices deviennent imaginaires. Dans ce cas, XY étant toujours le plan central de la congruence et OZ son axe, a, β et μ doivent être remplacés par $a\sqrt{-1}$, $\beta\sqrt{-1}$, $\mu\sqrt{-1}$. Si a est réel, on peut poser

$$a = \operatorname{tang} \alpha,$$

2α étant l'angle formé par les directions des deux directrices et bissecté par XZ. On a donc les relations ci-après :

$$\lambda = \frac{\operatorname{tang} \omega}{\operatorname{tang} \alpha}, \tag{73}$$

$$z^0 = \beta \frac{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}{\operatorname{tang} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tang} \omega}{1 + \operatorname{tang}^2 \omega} = \beta \frac{\sin \omega \cos \omega}{\sin \alpha \cos \alpha} = \beta \frac{\sin 2\omega}{\sin 2\alpha}, \tag{74}$$

$$\left\{ \begin{aligned} k &= \beta \frac{\operatorname{tang}^2 \alpha - \operatorname{tang}^2 \omega}{\operatorname{tang} \alpha (1 + \operatorname{tang}^2 \omega)} = \beta \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \omega - \sin^2 \omega \cos^2 \omega}{\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \beta \frac{\sin(\alpha + \omega) \sin(\alpha - \omega)}{\sin \alpha \cos \alpha}. \end{aligned} \right. \tag{75}$$

L'expression de z^0 montre que l'axe situé dans le plan central est parallèle à l'une des deux droites qui, dans ce plan, divisent en deux parties égales l'angle formé par des parallèles aux deux directrices. Ces deux droites, qui ont une relation particulière avec la congruence, peuvent être appelées son *second* et son *troisième axe*. Ces trois axes rectangulaires se coupent *au centre* de la congruence.

On peut exprimer l'angle ω en fonction de z^0. Pour cela, on a

$$\sin 2\omega = \frac{z^0}{\beta} \sin 2\alpha,$$

équation qui donne, pour chaque valeur de z^0, deux directions perpendiculaires l'une à l'autre.

57. Si, dans l'expression

$$z^0 = \frac{B}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{\tang\omega}{1+\tang^2\omega},$$

on remplace $\tang\omega$ par $\frac{y}{x}$, on trouve, en supprimant l'affixe de z^0,

$$(76)\qquad z(y^2+x^2) = \frac{\beta}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot xy.$$

Les axes de tous les complexes qui composent la congruence sont donc situés sur la surface représentée par cette équation. Or, cette équation ne change pas, si l'on fait permuter ensemble les axes OX, OY. Donc la surface contient les axes de deux séries différentes de complexes; l'une de ces deux séries forme la congruence donnée, tandis que l'autre se rapporte à une congruence étrangère, qu'on obtient en faisant tourner la première autour de son axe d'un angle de 90 degrés.

58. Soient

$$(77)\qquad \begin{cases} \Omega \equiv Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) = 0, \\ \Omega' \equiv A'r + B's + C' + D'\sigma + E'\rho + F'(s\rho - r\sigma) = 0, \\ \Omega'' \equiv A''r + B''s + C'' + D''\sigma + E''\rho + F''(s\rho - r\sigma) = 0, \end{cases}$$

les équations de trois complexes linéaires. L'ensemble de ces équations représente une *surface réglée*. Les complexes peuvent être remplacés par trois quelconques de ceux, en nombre infini, que représente la formule

$$\Omega + \mu\Omega' + \nu\Omega'' = 0,$$

où μ et ν peuvent prendre toutes les valeurs possibles. En associant les trois complexes deux à deux, on obtient trois congruences et par conséquent trois couples de directrices. Chaque rayon de la surface réglée, appartenant simultanément aux trois congruences, rencontre les deux directrices de chaque groupe. Donc la surface réglée est généralement *un hyperboloïde; les rayons forment les génératrices de l'un des modes de génération de la surface, et les directrices de toutes les con-*

gruences qui se coupent suivant cette surface forment les génératrices de l'autre mode de génération. Trois directrices quelconques suffisent pour déterminer l'hyperboloïde.

59. Soient P, P'; Q, Q'; R, R', les trois couples de directrices dont chacun détermine un plan central. Les trois plans centraux Π, k, P se coupent en un point C, *centre de la surface réglée.* Le segment d'un rayon de la congruence, terminé à deux directrices, étant bissecté par le plan central, les trois droites menées par le centre C de la surface, et qui s'appuient sur les deux directrices de chaque couple, sont divisées par le centre en deux parties égales; ce sont donc des *diamètres.*

Par exemple, soient π, π' les extrémités du diamètre $\pi C \pi'$ qui rencontre les deux bissectrices P, P'. Le rayon de la congruence (Ω, Ω') qui passe par π est parallèle à P', et le rayon qui passe par π' est parallèle à P. Les deux plans p, p', menés par les droites P et P' parallèlement au plan central Π, contenant chacun deux droites (savoir : une directrice et le rayon parallèle à l'autre) qui appartiennent aux deux modes de génération de l'hyperboloïde, touchent la surface en un point qui n'est autre que le point de concours des deux droites dans chacun de ces plans.

Par les six directrices P, P'; Q, Q'; R, R', faisons passer six plans p, p'; q, q'; r, r' parallèles deux à deux aux plans centraux Π, k, P. Ces six plans forment un parallélipipède circonscrit à la surface, dont trois diamètres joignent deux à deux les points de contact situés dans les plans opposés. Les axes des trois congruences correspondantes (Ω, Ω'), (Ω, Ω''), (Ω', Ω'') sont situés à égale distance des plans opposés de chacun des trois couples, et leurs centres sont faciles à déterminer.

60. L'hyperboloïde ainsi obtenu ne change pas si, au lieu des trois complexes Ω, Ω', Ω'', on en choisit arbitrairement trois autres parmi ceux que représente l'équation

$$\Omega + \mu\Omega' + \nu\Omega'' = 0;$$

mais les congruences varient, ainsi que leurs directrices et les trois

diamètres de l'hyperboloïde. Les directrices peuvent être réelles ou imaginaires; par conséquent les trois diamètres coupent l'hyperboloïde ou aucun d'eux ne le rencontre. Dans le cas intermédiaire, où les deux congruences coïncident, le diamètre correspondant se trouve situé sur le cône asymptote de la surface.

61. Réciproquement, étant donnés l'hyperboloïde et trois de ses diamètres, on peut remonter aux congruences d'où il dérive et même aux complexes primitifs. Les génératrices d'un même mode de génération peuvent être considérées comme étant les rayons, tandis que celles de l'autre mode de génération sont les directrices des congruences qui passent par la surface.

62. Il ne sera pas superflu de montrer comment on peut tirer de l'analyse les résultats présentés dans les précédents paragraphes. Pour cela, choisissons, comme devant déterminer la surface réglée, trois complexes de telle nature, que leurs rayons rencontrent leurs axes. Dans ce cas, les axes des trois complexes Ω, Ω', Ω'' sont trois des six directrices, P, Q, R, par exemple, situées dans les plans p, q, r. Prenons ces plans pour plans coordonnés XY, XZ, YZ, les trois complexes qui constituent la surface réglée seront représentés par des équations de la forme

$$(78)\qquad \begin{cases} \Omega \equiv C + D\sigma + E\rho = 0, \\ \Omega' \equiv B's + D'\sigma + F'(s\rho - r\sigma) = 0, \\ \Omega'' \equiv A''r + E''\rho + F''(s\rho - r\sigma) = 0. \end{cases}$$

Pour arriver à représenter par une seule équation en x, y, z une surface réglée déterminée au moyen de trois équations exprimées en coordonnées radiales, ces coordonnées doivent être éliminées à l'aide des deux équations suivantes :

$$x = rz + \rho,$$
$$y = rz + \sigma,$$

auxquelles il faut joindre l'équation suivante, qui en est la conséquence,

$$sx - ry = s\rho - r\sigma.$$

Dans le cas actuel, commençons par éliminer $s\rho - r\sigma$; il vient

$$(B' + F'x)s - F'yr + D'\sigma = 0,$$
$$(A'' - F''y)r + F''xs + E''\rho = 0;$$

éliminant ensuite ρ et σ, on trouve

$$Ezr + Dzs = C + Dy + Ex,$$
$$(B' + F'x - D'z)s - F'yr + D'y = 0,$$
$$(A'' - F''y - E''z)r + F''xs + E''x = 0.$$

Enfin, portant dans la première de ces équations les valeurs de r et de s tirées des deux dernières, il vient

$$\begin{aligned}&[(B' + F'x - D'z)E'' - F''D'y]Exz\\ &+ [(A'' - F''y - E''z)D' - E''F'x]Dyz\\ &+ [(A'' - F''y - E''z)(B' + F'x - D'z) + F'F''xy](C + Dy + Ex) = 0,\end{aligned}$$

qui donne, par la disparition des termes du troisième ordre,

$$(79)\quad \left\{\begin{aligned}&A''B'C + A''(B'E + CF')x + B'(A''D - CF'')y\\ &\quad - C(A''D' + E''B')z + A''F'Ex^2\\ &\quad - B'F''Dy^2 + CE''D'z^2 + (A''F'D - B'F''E)xy\\ &\quad - (A''D'E + CE''F)xy + (CF''D' - B'E''D)yz = 0.\end{aligned}\right.$$

Divisons par $A''B'C$, puis remplaçons respectivement les quantités

$$-\frac{E}{C},\quad -\frac{D}{C},\quad \frac{D'}{B'},\quad -\frac{F'}{B'},\quad \frac{E''}{A''},\quad \frac{F''}{A''}$$

par ξ, η, ζ', ξ', ζ'', η'', la dernière équation prend la forme symétrique

$$(80)\quad \left\{\begin{aligned}&1 - (\xi + \xi')x - (\eta + \eta')y - (\zeta + \zeta')z\\ &\quad + \xi\xi'x^2 + \eta\eta''y^2 + \zeta'\zeta''z^2 + (\xi'\eta + \xi\eta'')xy\\ &\qquad + (\xi'\zeta'' + \xi\zeta')xz + (\eta\zeta' + \eta''\zeta)yz = 0.\end{aligned}\right.$$

Cette équation représente la surface réglée et remplace les trois équations (78) qu'on peut écrire ainsi :

$$(81)\qquad \begin{cases} \eta\sigma + \xi\rho - 1 = 0, \\ \zeta'\sigma - \xi'(s\rho - r\sigma) + 1 = 0, \\ \zeta''\rho - \eta''(s\rho - r\sigma) + 1 = 0. \end{cases}$$

Elle montre que la surface est un hyperboloïde qui touche les trois plans XY, XZ, YZ. Les rayons contenus dans ces plans ont pour équations respectivement

$$(82)\qquad \begin{cases} z = 0, & \xi' x + \eta'' y = 1, \\ y = 0, & \xi x + \zeta'' z = 1, \\ x = 0, & \eta y + \zeta'' z = 1, \end{cases}$$

et les trois directrices qui s'y trouvent également comprises ont pour équations respectives

$$(83)\qquad \begin{cases} z = 0, & \xi x + \eta y = 1, \\ y = 0, & \xi' x + \zeta' z = 1, \\ x = 0, & \eta'' y + \zeta'' z = 1. \end{cases}$$

On obtient aisément les points de contact, qui, dans chaque plan, ne sont autre chose que les points d'intersection du rayon et de la directrice qu'il contient.

63. Telles sont les propriétés principales des complexes du premier ordre. Pour en montrer l'utilité, nous en ferons l'application à la théorie du passage des rayons lumineux dans les cristaux à deux axes; ce sera le sujet de la seconde Partie du présent Mémoire. Mais avant d'aborder cette question, il nous semble utile de reprendre, à un point de vue plus général, l'étude du mode de représentation d'une droite dans l'espace, et celle des complexes, des congruences et des surfaces réglées, qui en est la conséquence. Nous y consacrerons l'Appendice suivant, qui servira à éclaircir quelques points principaux de la théorie générale que nous venons d'exposer.

APPENDICE [*].

I. — *Coordonnées d'une ligne droite.*

1. Une ligne droite, quand on la considère comme un axe autour duquel pivote un plan mobile, est déterminée par deux positions de ce plan; analytiquement, par deux groupes de *coordonnées planaires*. Cette même droite, quand on la regarde comme le lieu géométrique d'un point mobile, est déterminée par deux positions de ce point; analytiquement, par deux groupes de *coordonnées ponctuelles*.

Supposons que les coordonnées planaires et pontuelles

$$\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w} \quad \text{et} \quad \frac{x}{\varpi}, \frac{y}{\varpi}, \frac{z}{\varpi}$$

soient telles, que la relation

$$(1) \qquad tx + uy + vz + w\varpi = 0$$

soit satisfaite, ce qui, géométriquement interprété, signifie que chaque point $\left(\frac{x}{\varpi}, \frac{y}{\varpi}, \frac{z}{\varpi}\right)$ est situé dans chaque plan $\left(\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$, ou, ce qui revient au même, que chaque plan $\left(\frac{t}{w} \cdot \frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$ passe par chaque point $\left(\frac{x}{\varpi}, \frac{y}{\varpi}, \frac{z}{\varpi}\right)$. J'ai donné ailleurs à ces coordonnées le nom de *coordonnées ponctuelles et planaires associées*, dont je ferai usage dans ce qui va suivre.

Une droite est déterminée par deux couples de coordonnées associées

$$\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w} \quad \text{et} \quad \frac{t'}{w'}, \frac{u'}{w'}, \frac{v'}{w'},$$

ou

$$\frac{x}{\varpi}, \frac{y}{\varpi}, \frac{z}{\varpi} \quad \text{et} \quad \frac{x'}{\varpi'}, \frac{y'}{\varpi'}, \frac{z'}{\varpi'}.$$

Au lieu d'équations ordinaires, on peut employer des équations

[*] Communiqué à la Société Royale de Londres le 11 décembre 1865.

homogènes. Chaque groupe de trois coordonnées est alors remplacé par un groupe de quatre coordonnées, savoir :

$$t, u, v, w \quad \text{et} \quad t', u', v', w',$$

ou

$$x, y, z, \varpi \quad \text{et} \quad x', y', z', \varpi'.$$

2. Les deux plans (t, u, v, w) et (t', u', v', w'), représentés en coordonnées ponctuelles par les équations

$$tx + uy + vz + w\varpi = 0,$$
$$t'x + u'y + v'z + w'\varpi = 0,$$

sont pris arbitrairement parmi tous ceux qui passent par une même droite, et peuvent être remplacés par deux autres quelconques, dont les équations auront la forme

$$(t + \mu.t')x + (u + \mu.u')y + (v + \mu.v')z + (w + \mu.w')\varpi = 0,$$

μ étant un coefficient arbitraire. Mais la position de la droite, par rapport aux axes coordonnés OX, OY, OZ, n'est liée d'une façon caractéristique avec un tel plan, que si le plan a lui-même une relation particulière avec les axes. Ceci arrive dans quatre cas distincts, savoir : quand le plan passe par l'origine, ou quand il est le plan de projection de la droite sur l'un des trois plans coordonnés. Donc, si l'on pose

$$w + \mu.w' = 0, \quad v + \mu.v' = 0, \quad u + \mu.u' = 0, \quad t + \mu.t' = 0,$$

la dernière équation devient successivement

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(tw' - t'w)\,x + (uw' - u'w)\,y + (vw' - v'w)\,z = 0,\\ &(tv' - t'v)\,x + (uv' - u'v)\,y - (vw' - v'w)\,\varpi = 0,\\ &(tu' - t'u)\,x - (uv' - u'v)\,y - (uw' - u'w)\,\varpi = 0,\\ -&(tu' - t'u)\,x - (tv' - t'v)\,z - (tw' - t'w)\,\varpi = 0. \end{aligned}\right.$$

Deux quelconques des quatre plans représentés par ces équations

suffisent pour fixer la position de la ligne droite. Ces deux équations renferment cinq constantes, qui, par la division, se réduisent à quatre, c'est-à-dire au nombre nécessaire pour déterminer une ligne droite. Outre les cinq constantes contenues dans ces deux équations, il s'en présente une sixième dans les deux équations restantes. Mais comme la ligne droite est entièrement déterminée par les cinq premières, cette sixième constante doit en être une fonction déterminée. L'équation de condition, qui les lie toutes les six ensemble, peut s'obtenir, par exemple, en ajoutant les trois dernières équations, après avoir multiplié la première d'entre elles par $-(tu'-t'u)$, la seconde par $(tv'-t'v)$ et la troisième par $-(uv'-u'v)$, ce qui donne

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &(tu'-t'u)(vw'-v'w)-(tv'-t'v)(uw'-u'w)\\ &\qquad\qquad +(uv'-u'v)(tw'-t'w)=0. \end{aligned} \right.$$

Les six constantes suivantes, prises avec le signe qu'on voudra, savoir :

$$\begin{gathered} \pm(uv'-u'v), \quad \pm(tv'-t'v), \quad \pm(tu'-t'u), \\ \pm(tw'-t'w), \quad \pm(uw'-u'w), \quad \pm(vw'-v'w), \end{gathered}$$

peuvent être regardées *comme étant les six coordonnées d'une ligne droite*.

3. Pareillement, si pour fixer la position d'une ligne droite on remplace les deux plans ci-dessus par les deux points (x, y, z, ϖ), (x', y', z', ϖ'), on obtient les équations suivantes en coordonnées planaires :

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x\varpi'-x'\varpi)t+(y\varpi'-y'\varpi)u+(z\varpi'-z'\varpi)v=0,\\ &(xz'-x'z)t+(yz'-y'z)u+(z\varpi'-z'\varpi)w=0,\\ &(xy'-x'y)t-(yz'-y'z)v-(y\varpi'-y'\varpi)w=0,\\ -&(xy'-x'y)u-(xz'-xz')v-(x\varpi'-x'\varpi)w=0, \end{aligned} \right.$$

lesquelles représentent quatre points, dont l'un est situé à l'infini sur la droite dont il s'agit de déterminer la position, tandis que les trois autres sont ceux où la droite vient rencontrer les plans coordonnés.

En conséquence, par des considérations analogues à celles qui ont été développées plus haut, on peut regarder les six constantes de ces quatre équations, prises avec tel signe qu'on voudra, savoir :

$$\pm(x\varpi' - x'\varpi),\quad \pm(y\varpi' - y'\varpi),\quad \pm(z\varpi' - z'\varpi),$$
$$\pm(yz' - y'z),\quad \pm(xz' - x'z),\quad \pm(xy' - x'y),$$

comme *étant les six coordonnées de la ligne droite*. Ces six coordonnées sont liées entre elles par l'équation de condition

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} (xy' - x'y)(z\varpi' - z'\varpi) - (xz' - x'z)(y\varpi' - y'\varpi) \\ \qquad\qquad + (yz' - y'z)(x\varpi' - x'\varpi) = 0. \end{array} \right.$$

4. Soient : δ la distance de la droite à l'origine des coordonnées, α, β, γ les angles qu'elle fait avec les trois axes OX, OY, OZ, et λ, μ, ν les angles que fait avec les mêmes axes la normale au plan mené par la droite et par l'origine ; on trouve aisément les relations

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \left\{ \begin{array}{l} (uv' - u'v) : -(tv' - t'v) : (tu' - t'u) \\ : (tw' - t'w) : \quad (uw' - u'w) : (vw' - v'w) \end{array} \right. \\ \text{II.} & \left\{ \begin{array}{l} = (x\varpi' - x'\varpi) : \quad (y\varpi' - y'\varpi) : (z\varpi' - z'\varpi) \\ : (yz' - y'z) : -(xz' - x'z) : (xy' - x'y) \end{array} \right. \\ \text{III.} & \quad = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : \delta\cos\lambda : \delta\cos\mu : \delta\cos\nu. \end{array}$$

5. De là on conclut que

$$\cos\alpha,\quad \cos\beta,\quad \cos\gamma,\quad \delta\cos\lambda,\quad \delta\cos\mu,\quad \delta\cos\nu$$

peuvent aussi être regardées comme les *coordonnées d'une droite* liées entre elles par l'équation de condition

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$

qui, jointe aux deux suivantes,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

réduit à quatre le nombre des constantes desquelles dépend la position de la ligne droite.

6. Les deux suites de rapports I et II conservent la même généralité, si l'on y pose

$$w = w' = \pm 1, \quad \varpi = \varpi' = \pm 1.$$

Supposons, en outre, que les deux plans et les deux points par lesquels la droite est déterminée coïncident ou soient infiniment voisins, on obtient, en choisissant les signes inférieurs, les deux suites de rapports égaux :

$$\text{IV.} \qquad = (udv - vdu) : -(tdv - vdt) : (tdu - udt) : dt : du : dv$$

$$\text{V.} \qquad = dx : dy : dz : (ydz - zdy) : (xdz - zdx) : (xdy - ydx).$$

Ce sont deux systèmes de coordonnées différentielles, dx, dy, dz indiquant la direction de la droite, dt, du, dv la direction de la normale au plan qui passe par cette droite et par l'origine des coordonnées. Les variables x, y, z, t, u, v peuvent être regardées comme étant des fonctions du temps.

7. On peut représenter la direction d'une *force* par une droite, et son intensité par la distance de deux points servant à fixer la position de cette droite. Appelant X, Y, Z les projections de la force sur les axes OX, OY, OZ, et désignant par L, M, N les projections de son moment relatif à l'origine sur les plans YZ, XZ, XY, on obtient cette nouvelle suite de rapports égaux :

$$\text{VI.} \qquad = \mathrm{X} : \mathrm{Y} : \mathrm{Z} : \mathrm{L} : \mathrm{M} : \mathrm{N}.$$

On peut donc regarder X, Y, Z, L, M, N comme étant les coordonnées d'une droite liées entre elles par l'équation de condition

$$(6) \qquad \mathrm{XL} + \mathrm{YM} + \mathrm{ZN} = 0.$$

8. Les six coordonnées de chacun des systèmes précités se partagent en deux groupes de trois, de telle sorte qu'à chaque coordonnée de l'un des groupes il correspond une coordonnée de l'autre groupe. Si

l'on change les axes, les deux groupes restent les mêmes; mais les trois couples de coordonnées correspondantes varient.

Quand on connaît les six coordonnées d'une ligne droite, on obtient les cinq coordonnées absolues, en divisant cinq d'entre elles par la sixième. Il se présente donc deux cas distincts, selon que la coordonnée par laquelle on divise les autres appartient au premier ou au second groupe.

9. Divisons les deux premiers et les trois derniers termes des rapports I par le troisième $(tu' - t'u)$, et posons

$$\frac{uv' - u'v}{tu' - t'u} = r, \quad -\frac{tv' - t'v}{tu' - t'u} = s, \quad \frac{tw' - t'w}{tu' - t'u} = -\sigma,$$

$$\frac{uw' - u'w}{tu' - t'u} = \rho, \quad \frac{vw' - v'w}{tu' - t'u} = \eta,$$

il vient, en vertu de l'équation de condition (3),

$$\eta = r\sigma - s\rho;$$

r, s, $(-\sigma)$, ρ et η sont les *cinq* coordonnées absolues de la ligne droite. Les deux dernières des quatres équations (2), qui représentent les plans par lesquels la droite est projetée sur les plans XZ et YZ, aussi bien que ses projections mêmes, peuvent donc s'écrire comme il suit :

$$x = rz + \rho,$$

$$y = sz + \sigma,$$

r et s étant les tangentes trigonométriques des angles formés par les deux projections avec l'axe OZ, ρ et σ et les segments interceptés par elles sur les axes OX et OY.

De même, si l'on divise les cinq premiers rapports de la suite II par le sixième $(xy' - x'y)$ et qu'on pose

$$\frac{x\varpi' - x'\varpi}{xy' - x'y} = -\varkappa, \quad \frac{y\varpi' - y'\varpi}{xy' - x'y} = \pi, \quad \frac{z\varpi' - z'\varpi}{xy' - x'y} = \zeta,$$

$$\frac{yz' - y'z}{xy' - x'y} = p, \quad -\frac{x'z - x'z}{xy' - x'y} = q,$$

on a, à cause de l'équation (5),

$$\zeta = p\varkappa - q\pi,$$

et p, q, $(-\varkappa)$, π et ζ sont les *cinq* nouvelles coordonnées. Quatre d'entre elles se rencontrent dans les deux dernières des quatre équations (4), et représentent les deux points d'intersection de la ligne droite par les plans XZ et YZ. Ces équations prennent la forme suivante :

$$t = pv + \pi w,$$
$$u = qv + \varkappa w,$$

et peuvent, en désignant les coordonnées des deux points, dans les deux plans respectivement, par x_y, z_y et y_x, z_x, s'écrire ainsi :

$$x_y t + z_y v + w = 0,$$
$$y_x u + z_x v + w = 0,$$

à cause de

$$p = -\frac{z_y}{x_y}, \quad \pi = -\frac{1}{x_y}, \quad q = -\frac{z_x}{y_x}, \quad \varkappa = -\frac{1}{y_x}.$$

Ajoutons encore aux séries précédentes de rapports égaux les deux suivantes :

VII. $\quad = r : s : 1 : (-\sigma) : \rho : \eta (\equiv r\sigma - s\rho).$

VIII. $\quad = -\varkappa : \pi : \zeta (\equiv p\varkappa - q\pi) : p : q : 1.$

10. On obtient ainsi huit systèmes différents de coordonnées de la ligne droite, les coordonnées étant les six termes de chacune des huit suites de rapports égaux I à VIII. Ces coordonnées changent avec la position de l'origine et la direction des axes. Il est inutile de transcrire ici les formules relatives à cette transformation, et il suffit de dire qu'elles se transportent sans difficulté d'un système à l'autre.

II. — *Complexes. Congruences. Surfaces engendrées par une droite mobile. Surfaces développables et courbes à double courbure.*

11. Nous dirons qu'une équation homogène entre six coordonnées d'une droite représente un *complexe* formé par toutes les droites dont

les coordonnées satisfont à l'équation proposée. A cause de l'identité des rapports I à VIII, les équations ci-après :

$$F[(uv'-u'v),\ -(tv'-t'v),\ (tu'-t'u),$$
$$(tw'-t'w),\ (uw'-u'w),\ (vw'-v'w)]=0,$$
$$F[(x\varpi'-x'\varpi),\ (y\varpi'-y'\varpi),\ (z\varpi'-z'\varpi),$$
$$(yz'-y'z),\ -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)]=0,$$
$$F[\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma,\ \delta\cos\lambda,\ \delta\cos\mu,\ \delta\cos\nu]=0,$$
$$F[(udv-vdu),\ -(tdv-vdt),\ (tdu-udt),\ dt,\ du,\ dv]=0,$$
$$F[dx, dy, dz,\ (ydz-zdy),\ -(xdz-zdx),\ (xdy-ydx)]=0,$$
$$F[X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N]=0,$$
$$F[r, s, 1, (-\sigma), \rho, \eta]=0,$$
$$F[(-\varkappa), \pi, \zeta, p, q, 1]=0,$$

représentent le même complexe, F étant supposé indiquer, dans chacune d'elles, la même fonction homogène des différents groupes de coordonnées de la droite. Si l'équation est du degré n, nous dirons que le complexe est du degré n, et nous le représenterons par la lettre Ω_n.

12. Prenons d'abord la première équation

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}\Omega_n\equiv F[(uv'-u'v),\ -(tv'-t'v),\ (tu'-t'u),\\ \qquad (tw'-t'w),\ (uw'-u'w),\ (vw'-v'w)]=0.\end{array}\right.$$

t, u, v, w et t', u', v', w' doivent se rapporter à deux plans passant par une droite quelconque du complexe. Supposons que l'un de ces deux plans (t', u', v', w') soit donné. Alors l'équation précédente, dans laquelle on regardera t', u', v', w' comme constants et t, u, v, w comme variables, représente, dans le plan donné, une *courbe* enveloppée par les plans tangents (t, u, v, w). Les droites du complexe, contenues dans ce plan, enveloppent aussi la même courbe, dont la *classe* est la même que le degré du complexe. Donc :

Un complexe Ω_n du degré n étant donné, il existe dans un plan

quelconque une courbe de la classe n qui est enveloppée par les droites du complexe situées dans ce plan.

Les équations de ces courbes concordent exactement avec celle du complexe lui-même. Il suffit de regarder dans celle-ci t', u', v', w' comme des constantes relatives au plan donné, tandis que t, u, v, w y sont regardées comme les coordonnées d'un plan variable.

Si $n=1$, la courbe contenue dans chaque plan devient un point, et toute droite menée par le point dans ce plan fait partie du complexe linéaire.

Si $n=2$, les courbes enveloppées sont des coniques qui peuvent dégénérer en deux points réels ou imaginaires.

13. Prenons actuellement la seconde équation du complexe, savoir :

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda\Omega_n \equiv [(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z), \\ \qquad\qquad -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)] = 0, \end{cases}$$

où nous supposons $\varpi'=\varpi=1$, et où λ désigne une constante. Si l'on rapporte x', y', z' à un point fixe de l'espace, et par conséquent si l'on regarde ces quantités comme des constantes, tandis que x, y, z sont les coordonnées variables des points d'une droite quelconque du complexe, cette équation représentera un cône du n^{ieme} ordre, lieu géométrique des droites du complexe qui passent par le point donné. Donc :

Un complexe du degré n étant donné, chaque point de l'espace est le sommet d'un cône du $n^{ième}$ ordre, où convergent les droites du complexe.

Dans les complexes linéaires, les droites concourantes en un même point forment un plan. Si $n=2$, les cônes sont du second ordre, et peuvent dégénérer en deux plans réels ou imaginaires.

14. Les droites qui composent un complexe Ω_n peuvent être distribuées de deux manières distinctes, soit en considérant les plans qui les contiennent, soit en considérant les points où elles convergent. Jusqu'ici nous avons regardé Ω_n comme étant un *complexe de lignes droites*, dont le nombre est ∞^3. Mais on peut tout aussi bien le

regarder comme étant un complexe de courbes, ou comme étant un complexe de cônes, le nombre des courbes et celui des cônes étant ∞^2. Nous dirons donc que

$$\Omega_n$$

représente à la fois une courbe de la classe n dans chaque plan de l'espace, et un cône du degré n ayant son sommet en chaque point de l'espace.

Quand un plan tourne autour d'une droite donnée, ou se meut parallèlement à lui-même, la courbe de la $n^{ième}$ classe située dans ce plan engendre une surface. De même, si le sommet du cône décrit une droite, ce cône enveloppe une surface. Le nombre des surfaces, ainsi engendrées par les courbes et enveloppées par les cônes, est ∞. A toute droite donnée, il correspond une même surface engendrée de ces deux manières ; donc, pour obtenir toutes les surfaces, il suffit de faire tourner une droite dans tous les sens possibles autour d'un de ses points. Et par conséquent, on peut regarder Ω_n comme étant un complexe de surfaces à la fois décrites par une courbe mobile de la classe n, dont le plan passe par une droite donnée arbitrairement, et enveloppées par un cône du degré n, dont le sommet variable est situé sur cette même droite.

15. Soit μ un coefficient variable, l'équation

$$\Omega_n + \mu\Omega_m = 0 \tag{3}$$

représente un nombre infini de complexes. Les droites communes à deux d'entre eux sont communes à tous. Toutes ces droites forment une *congruence* (Ω_n, Ω_m) représentée par le système des équations des deux complexes.

Chaque plan de l'espace contient une courbe de chacun des deux complexes ; les mn tangentes communes à ces deux courbes appartiennent à la congruence. Toutes les courbes appartenant aux différents complexes (3) et situées dans le même plan touchent ces mêmes mn droites. De même, chaque point de l'espace est le sommet d'un cône appartenant à l'un des complexes (3). Tous ces cônes se coupent sui-

vant les mêmes mn arêtes, qui sont des droites faisant partie de la congruence. Donc :

Une congruence (Ω_n, Ω_m) *a toujours mn droites situées dans un plan quelconque et mn droites passant par un point quelconque.*

Le nombre des droites qui forment une congruence est ∞^2. Si $m = 1$, il existe dans chaque plan n droites de la congruence (Ω_n, Ω_1) passant par un même point, et de même, parmi les droites qui concourent en un même point, il y en a n qui sont situées dans un même plan; ce point et ce plan se correspondent l'un à l'autre.

16. Soient μ et ν deux coefficients arbitraires.

$$(4) \qquad \Omega \equiv \Omega' + \mu\Omega'' + \nu\Omega''' = 0$$

représente un nombre infini (∞^2) de complexes qui se coupent tous suivant les droites appartenant simultanément à trois d'entre eux, par exemple à ceux-ci

$$(5) \qquad \Omega' = 0, \quad \Omega'' = 0, \quad \Omega''' = 0.$$

La position d'une de ces droites est déterminée par les équations (5), pourvu qu'on prenne arbitrairement la valeur d'une des quatre constantes desquelles dépend en général la position d'une droite; en d'autres termes, trois de ces quatre constantes sont des fonctions de la quatrième qui varient infiniment peu, si les variations de celle-ci sont elles-mêmes infiniment petites. On conclut de là que toute droite, dont les coordonnées satisfont aux équations (5), engendre une surface en passant successivement par toutes les positions qu'elle peut prendre. Nous dirons que cette surface $(\Omega', \Omega'', \Omega''')$ représente le système des trois équations (5).

17. Un point de l'espace étant donné, il y a trois cônes formés par les droites qui passent par ce point et qui appartiennent respectivement aux trois complexes (5). En général, ces trois cônes ne se coupent pas suivant une même arête; mais il y a certaines positions du point, qui est leur sommet commun, pour lesquelles cette circonstance se présente. Dans ce cas, l'arête commune aux trois cônes appartient à la surface $(\Omega', \Omega'', \Omega''')$, et par conséquent le point donné en fait aussi

partie. Posons

$$(6)\quad \begin{cases} \lambda'\Omega' \equiv F'[(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z), \\ \qquad\qquad -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)] = 0, \\ \lambda''\Omega'' \equiv F''[(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z), \\ \qquad\qquad -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)] = 0, \\ \lambda'''\Omega''' \equiv F'''[(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z), \\ \qquad\qquad -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)] = 0. \end{cases}$$

Supposons que x', y', z' soient les coordonnées d'un point fixe arbitraire, x, y, z celles d'un point variable. Les équations (6) sont celles de trois cônes, dont les génératrices appartiennent aux trois complexes (5), et qui ont le point x', y', z' pour sommet commun. Si l'on transporte en ce point l'origine des coordonnées, leurs équations deviennent

$$(7)\quad \begin{cases} F'[x, y, z,\ (yz'-y'z), -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)] = 0, \\ F''[x, y, z,\ (yz'-y'z), -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)] = 0, \\ F'''[x, y, z,\ (yz'-y'z), -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)] = 0. \end{cases}$$

Ces équations étant homogènes par rapport à x, y, z ne sont pas satisfaites, en général, par les trois variables. Pour exprimer qu'elles subsistent simultanément, éliminons x, y, z : il vient

$$(8)\qquad \varphi(x', y', z') = 0,$$

φ désignant une fonction dans laquelle se trouvent impliquées les constantes primitives des trois complexes (5). Cette équation peut être rendue homogène en y introduisant la variable ϖ'. Si l'on y regarde les coordonnées comme variables, elle représente, en coordonnées ponctuelles, la surface qui, dans le même système de coordonnées, est exprimée par les trois équations (5).

18. Semblablement, dans chaque plan de l'espace se trouvent trois courbes enveloppées par les droites des complexes Ω', Ω'', Ω'''. En général, ces trois courbes n'ont pas de tangente commune; mais ce cas se présente pour certaines positions du plan, et la tangente com-

mune appartient alors à la surface $(\Omega', \Omega'', \Omega''')$. Réciproquement, si si l'on fait passer un plan par l'une des génératrices de cette surface, les courbes enveloppées par les droites d'un des complexes touchent cette génératrice, et continuent à lui être tangentes quand le plan tourne autour de la génératrice. Ce plan est tangent à la surface dans chacune de ses positions. Posons

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega' &\equiv F'[(uv' - u'v),\ -(tv' - t'v),\ (tu' - t'u), \\ &\qquad (t - t'),\ (u - u'),\ (v - v')] = 0, \\ \Omega'' &\equiv F''[(uv' - u'v),\ -(tv' - t'v),\ (tu' - t'u), \\ &\qquad (t - t'),\ (u - u'),\ (v - v')] = 0, \\ \Omega''' &\equiv F'''[(uv' - u'v),\ -(tv' - t'v),\ (tu' - t'u), \\ &\qquad (t - t'),\ (u - u'),\ (v - v')] = 0. \end{aligned}\right.$$

Si t, u, v sont les coordonnées planaires variables, et t', u', v' celles d'un plan fixe, ces équations sont celles des trois courbes enveloppées dans ce plan par les trois complexes Ω', Ω'', Ω'''. A cause de cela, elles peuvent être réduites à ne contenir que deux variables, et par conséquent elles ne sont généralement pas satisfaites par les mêmes valeurs des trois variables ainsi réduites à deux. L'élimination des variables entre les équations (9) conduit à une équation telle que

$$(10)\qquad \psi(t', u', v') = 0,$$

qui, en regardant t', u', v' comme variables, représente en coordonnées planaires la surface $(\Omega', \Omega'', \Omega''')$.

19. Les équations (9) représentent la même surface que les équations (6); montrons comment on peut, en effet, passer des unes aux autres. On passe d'abord des équations (6) aux trois suivantes :

$$\begin{aligned} &F'[(yz' - y'z),\ -(xz' - x'z),\ (xy' - x'y), \\ &\qquad (x - x'),\ (y - y'),\ (z - z')] = 0, \\ &F''[(yz' - y'z),\ -(xz' - x'z),\ (xy' - x'y), \\ &\qquad (x - x'),\ (y - y'),\ (z - z')] = 0, \\ &F'''[(yz' - y'z),\ -(xz' - x'z),\ (xy' - x'y), \\ &\qquad (x - x'),\ (y - y'),\ (z - z')] = 0. \end{aligned}$$

On remplace ensuite x, y, z, x', y', z' par t, u, v, t', u', v'; ce qui aboutit au même résultat que si l'on eût simplement échangé l'un dans l'autre les coefficients constants dans chacune des trois équations (6). D'après cela, si l'on remarque que l'équation (10) est dérivée de (9) par des opérations algébriques identiques à celles qui ont servi à tirer l'équation (8) de (7), on peut en conclure que l'équation (10) peut être dérivée de (8) par une simple permutation des constantes et par la substitution des coordonnées planaires aux coordonnées ponctuelles.

20. Dans une congruence (Ω_n, Ω_m), il y a mn droites concourantes en un point donné. Deux, trois, quatre de ces lignes peuvent coïncider. Dans ce cas, les cônes des deux complexes Ω_n, Ω_m qui ont leur sommet commun au point donné sont tangents ou osculateurs l'un à l'autre, le long de la droite double ou multiple dont il s'agit. Pour obtenir l'expression analytique de ces nouvelles conditions, transportons, comme nous l'avons fait plus haut, l'origine au sommet de deux cônes, et posons

$$\frac{x}{z} = p, \quad \frac{y}{z} = q,$$

les équations des deux cônes peuvent s'écrire ainsi (**17**) :

$$(11) \qquad \begin{cases} f\,(p, q, x', y', z') = 0, \\ f'(p, q, x', y', z') = 0, \end{cases}$$

f et f' représentant deux fonctions des variables p et q, par lesquelles les arêtes des deux cônes sont déterminées, x', y', z' étant les coordonnées du point donné. Si deux des arêtes communes aux deux cônes coïncident suivant une droite (p, q), on a, pour déterminer cette droite, non-seulement les deux équations (11), mais encore la suivante :

$$\frac{df}{dq} : \frac{df}{dp} = \frac{df'}{dq} : \frac{df'}{dp},$$

qui, développée, prend la forme

$$(12) \qquad f''(p, q, x', y', z') = 0,$$

f'' désignant une nouvelle fonction. Éliminant p et q entre les trois équations (11) et (12), on parvient à une équation de la forme

$$(13) \qquad \psi(x', y', z') = 0,$$

qui représente, x', y' et z' étant des variables, une *surface développable*, lieu des points par où passent les lignes doubles de la congruence, ou, en d'autres termes, lieu de ces droites elles-mêmes.

Si trois arêtes des deux cônes (11) coïncident selon une même droite (p, q), on a une nouvelle équation de condition, savoir :

$$\frac{\frac{d^2f}{dp^2}\left(\frac{df}{dq}\right)^2 - 2\frac{d^2f}{dp\,dq}\cdot\frac{df}{dq}\cdot\frac{df}{dp} + \frac{d^2f}{dq^2}\left(\frac{df}{dp}\right)^2}{\frac{d^2f'}{dp^2}\left(\frac{df'}{dq}\right)^2 - 2\frac{d^2f'}{dp\,dq}\cdot\frac{df'}{dq}\cdot\frac{df'}{dp} + \frac{d^2f'}{dq^2}\left(\frac{df'}{dp}\right)^2} = \frac{\left(\frac{df}{dp}\right)^3}{\left(\frac{df'}{dp}\right)^3} = \frac{\left(\frac{df}{dq}\right)^3}{\left(\frac{df'}{dq}\right)^3},$$

qu'on peut aussi développer en une équation de la forme

$$(14) \qquad f'''(p, q, x', y', z') = 0.$$

Cette équation, combinée avec les trois premières (11) et (12), fournit une nouvelle équation de condition

$$(15) \qquad \psi'(x', y', z') = 0.$$

Le système des deux équations (13) et (15) donne, pour le lieu des points par où passent les *lignes triples* de la congruence, une *courbe à double courbure*.

En continuant de la même manière, on obtient une nouvelle équation de la même forme que (13) et (15) qui, combinée avec ces deux-ci, fait connaître les points, en nombre limité, par lesquels passent les lignes quadruples de la congruence.

Quant aux droites quintuples, elles ne se rencontrent que dans les congruences d'une espèce particulière.

21. On peut déterminer d'une manière analogue la position des plans dans lesquels deux, trois, quatre des mn lignes de la con-

gruence (Ω_n, Ω_m) qui s'y trouvent, coïncident. Dans ce cas, les deux courbes contenues dans ce plan, et qui y sont enveloppées par les droites des complexes Ω_n et Ω_m, se touchent ou s'osculent suivant une de ces mn droites.

En opérant sur les deux premières des équations (9) comme nous l'avons fait sur les deux premières équations (6), nous aurons, pour représenter en coordonnées planaires le lieu enveloppé par les plans qui contiennent une ligne double de la congruence, l'équation suivante :

$$(16) \qquad \psi(t, u, v) = 0,$$

qui, selon les remarques du n° **19** également applicables ici, dérive de (10) par un simple changement des constantes. Tout plan passant par une ligne droite double étant un plan tangent de la surface enveloppe, cette surface dégénère en *une courbe à double courbure*.

On peut ensuite, de la même manière, déduire une autre équation de l'équation (15), que nous désignerons par

$$(17) \qquad \psi'(t, u, v) = 0.$$

Le système des deux équations (16) et (17) représente une *surface développable*, dont les plans tangents contiennent les droites triples de la congruence. Enfin, il existe certains plans, en nombre limité, qui contiennent des droites quadruples. Ces plans, aussi bien que les points de la courbe à double courbure par lesquels passent les droites quadruples, sont déterminés par des coordonnées planaires et ponctuelles associées, qui sont des fonctions des constantes de la congruence, et qui dérivent l'une de l'autre par une simple permutation de ces constantes, ainsi qu'on l'a déjà dit plus haut.

22. Les lignes doubles d'une congruence forment une surface, dégénérée en une surface développable, de même qu'elles enveloppent une surface dégénérée en une courbe à double courbure. La surface développable est représentée, en coordonnées ponctuelles, par une seule équation (13); en coordonnées planaires, par le système des

deux équations (16) et (17). La courbe à double courbure est représentée, en coordonnées planaires, par une seule équation (16), et, en coordonnées ponctuelles, par le système des deux équations (13) et (15). Les plans tangents de la surface qui contiennent les droites triples de la congruence sont osculateurs de la courbe; les points de la courbe par où passent ces droites triples sont des *points osculateurs* de la surface, par où passent trois de ses tangents consécutifs. Aux points d'inflexion de la courbe, le plan osculateur a quatre points consécutifs communs avec elle. Par chacun de ces points passent quatre plans tangents consécutifs de la surface, et l'intersection commune de ces plans est une ligne d'inflexion de la surface développable. Les droites quadruples de la congruence passent par ces points et sont contenues dans ces plans

III. — *Sur un nouveau système de coordonnées.*

23. Jusqu'ici nous avons déterminé la position d'une droite dans l'espace en faisant usage du système ordinaire des trois axes coordonnés OX, OY, OZ qui se coupent mutuellement. Mais on peut se demander s'il ne serait pas possible de fixer immédiatement la position d'une droite dans l'espace, sans recourir à l'intermédiaire des points et des plans.

Dans le système ordinaire des coordonnées : 1° la position d'un point est déterminée au moyen de trois plans parallèles aux plans coordonnés et qui se coupent en ce point; 2° la position d'un plan est donnée par une équation linéaire entre les trois coordonnées d'un point regardé comme variable; le point et le plan dépendent l'un et l'autre de trois constantes.

D'une manière analogue, une droite est déterminée par l'intersection de quatre complexes linéaires. Un complexe linéaire dépend de la position de son axe, et, en outre, d'une constante. Une droite, considérée comme étant une *force*, appartient au complexe, si le moment de rotation de la force par rapport à l'axe, divisé par sa projection sur l'axe, est égal à une constante. Donc, étant donnés quatre axes dans l'espace, la position d'une droite est fixée par quatre constantes qu'on obtient en divisant ses quatre moments de rotation

relatifs aux quatre axes par ses quatre projections sur ces axes respectivement.

Les quatre axes des complexes constituent un nouveau système de coordonnées, et les quatre constantes dont il vient d'être question sont les quatre coordonnées d'une ligne droite. La droite qui coupe les quatre axes est l'origine des coordonnées, puisque ses quatre coordonnées sont nulles.

Dans ce nouveau système, une ligne droite est déterminée de la manière la plus générale par ses quatre coordonnées ; mais une équation entre les quatre coordonnées n'est généralement pas suffisante pour représenter un complexe linéaire, puisqu'il dépend de cinq constantes.

On peut augmenter *ad libitum* le nombre des coordonnées d'une ligne droite.

24. Soient P, Q, R, S, T, U,... les axes de plusieurs complexes, et p, q, r, s, t, u,... les coordonnées correspondantes d'une ligne droite (23). Soient aussi

$$\Omega_p \equiv U_p - p = 0, \quad \Omega_q \equiv U_q - q = 0, \quad \Omega_r \equiv U_r - r = 0,$$
$$\Omega_s \equiv U_s - s = 0, \quad \Omega_t \equiv U_t - t = 0, \quad \Omega_u \equiv U_u - u = 0, \ldots,$$

les équations des complexes. Pour exprimer que ces complexes se coupent suivant une même ligne droite, nous aurons les équations de condition suivantes :

$$(18) \qquad \begin{cases} \Omega_t \equiv \varkappa\Omega_p + \lambda\Omega_q + \mu\Omega_r + \nu\Omega_s, \\ \Omega_u \equiv \varkappa'\Omega_p + \lambda'\Omega_q + \mu'\Omega_r + \nu'\Omega_s, \end{cases}$$

où nous pouvons supposer que P, Q, R, S sont les quatre premiers axes coordonnés ; $\varkappa, \varkappa', \lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ étant des coefficients constants.

Si l'on fait les coordonnées $p, q, r, s, t, u, \ldots$ égales à zéro, les équations générales des complexes deviennent

$$U_p = 0, \quad U_q = 0, \quad U_r = 0, \quad U_s = 0, \quad U_t = 0, \quad U_u = 0.$$

Ces nouvelles équations représentent des complexes d'une espèce particulière telle, que leurs axes sont rencontrés par les droites qui les composent; on peut dire qu'ils représentent ces axes eux-mêmes.

Pour satisfaire aux équations (18), posons

$$(19)\qquad \begin{cases} U_t \equiv \varkappa U_p + \lambda U_q + \mu U_r + \nu U_s, \\ U_u \equiv \varkappa' U_p + \lambda' U_q + \mu' U_r + \nu' U_s, \end{cases}$$

d'où l'on conclut

$$(20)\qquad \begin{cases} t = \varkappa p + \lambda q + \mu r + \nu s. \\ u = \varkappa' p + \lambda' q + \mu' r + \nu' s. \end{cases}$$

Les équations (19) exigent que l'*origine*, rencontrée par les axes P, Q, R, S, le soit aussi par les nouveaux axes T, U,....

Donc $p, q, r, s, t, u, \ldots$ peuvent être regardées comme étant les coordonnées d'une droite suivant laquelle tous les complexes se rencontrent, les axes de ces complexes qui coupent une même droite étant les axes coordonnés. Une droite est complétement déterminée par les quatre premières de ces coordonnées; les autres ont avec ces quatre-là des dépendances exprimées par les équations linéaires (20).

Le système de quatre axes coordonnés dépend de 16 constantes, celui de cinq axes dépend de 19 constantes, celui de six axes dépend de 22 constantes.

Avec un tel système de coordonnées, qui permet de fixer la position d'une droite dans l'espace indépendamment des points et des plans, on peut, en regardant les lignes droites comme les éléments constitutifs de l'espace, refaire toute la Géométrie sans avoir besoin de recourir au système ordinaire. L'analogie nous porte à croire que cette tâche serait féconde; mais on ne peut se dissimuler qu'elle serait aussi très-laborieuse

Expériences et considérations théoriques sur un nouveau système d'écluses de navigation;

PAR M. ANATOLE DE CALIGNY.

Cette Note renferme un extrait officiel du Rapport d'une Commission d'Ingénieurs des Ponts et Chaussées, rédigé en 1866.

Description du système primitif.

Cet appareil a pour objet de remplir un sas d'écluse de navigation, en tirant une partie de l'eau du bief inférieur, et de la vider en relevant une partie de l'eau au bief supérieur. Il se compose : 1° d'un grand tuyau de conduite fixe débouchant par une extrémité dans l'enclave des portes d'aval, et traversant par l'autre extrémité un réservoir en communication avec le bief d'amont; 2° de deux tubes verticaux mobiles ouverts à leurs deux extrémités, mettant alternativement ce tuyau de conduite, percé de deux orifices horizontaux, en communication avec le bief d'amont par le réservoir dont je viens de parler, et avec le bief d'aval par un autre réservoir communiquant avec ce dernier bief au moyen d'un fossé de décharge. Chacun de ces tubes mobiles est manœuvré à l'aide d'un balancier. On reviendra plus loin sur les détails relatifs à ces tubes : il ne s'agit d'abord que du principe.

Pour remplir l'écluse, on lève le tube vertical qui est dans le réservoir précité d'amont; l'eau s'écoule de ce réservoir dans l'écluse par le grand tuyau de conduite. Quand un certaine vitesse est acquise, on laisse ce tube vertical retomber sur son siége, de sorte que la communication est interrompue entre le grand tuyau de conduite et le bief d'amont. L'eau, en se dirigeant vers l'écluse, tend à baisser dans le grand tuyau de conduite; mais, quand elle est suffisamment descendue dans le premier tube vertical ouvert à ses deux extrémités, et dans lequel l'air extérieur entre librement par le sommet, on lève l'autre

tube vertical pour établir la communication avec le bief d'aval, dont l'eau entre dans le tuyau de conduite pour remplir le vide que tend à y faire l'eau qui se dirige vers l'écluse en vertu du mouvement acquis. Quand ce mouvement s'est éteint, on baisse le tube mobile d'aval, on lève celui d'amont, et ainsi de suite, tant que l'appareil peut marcher assez utilement.

Pour vider l'écluse, il n'est nécessaire de manœuvrer qu'un seul des tubes mobiles, celui d'aval, l'autre pouvant rester baissé pendant toute l'opération de la vidange. On lève le tube mobile d'aval, l'eau de l'écluse s'écoule au bief inférieur par le grand tuyau de conduite. Quand une vitesse convenable est acquise dans ce dernier, on baisse ce tube mobile. En vertu de la vitesse acquise, l'eau, après s'être élevée au niveau de celle qui est dans l'écluse, monte plus haut et se verse aux sommets des deux tubes mobiles; elle peut à la rigueur ne se verser que par le sommet du tube mobile d'amont, l'autre pouvant, si l'on veut, se prolonger assez haut pour que cet effet se produise de cette manière.

Dans les dernières expériences en grand, le tuyau de conduite ayant 1 mètre de diamètre intérieur, le versement se faisait par le sommet des deux tubes verticaux. Celui d'aval était entouré à son sommet d'un tuyau fixe, attaché au fond d'un réservoir supérieur en communication avec le bief d'amont. On conçoit qu'il peut se perdre de l'eau entre ce bout de tuyau fixe et le tuyau mobile d'aval; mais les extrémités de ces deux tubes peuvent être disposées de manière que cette perte se réduise à très-peu de chose, un rebord extérieur du tube mobile pouvant approcher de très-près du sommet du tube fixe sans que cela empêche la fermeture du tube mobile sur un siége annulaire fixe convenablement disposé au-dessous de celui-ci.

Je suppose qu'un bélier hydraulique élévatoire et un bélier hydraulique aspirateur puissent être disposés sur un même corps de bélier, de manière que le bélier élévatoire pût marcher en relevant une partie de l'eau au bief supérieur, et que le bélier aspirateur pût marcher quand on remplit au contraire l'écluse, en tirant une partie de l'eau du bief inférieur. Mon but a été de produire le même effet, mais en disposant les choses de manière que les sections transversales ne puissent jamais être bouchées.

Il résulte de ces dispositions que les coups de bélier sont impossibles; de sorte que des tuyaux de grand diamètre très-fragiles, en très-vieille tôle ou même en zinc, n'ont point été endommagés par le jeu d'immenses colonnes liquides.

Les orifices du grand tuyau de conduite sur lesquels les tuyaux mobiles verticaux viennent alternativement s'appuyer pour interrompre la communication du système, soit avec le bief d'amont, soit avec le bief d'aval, soit avec l'un et l'autre de ces biefs, doivent être disposés le plus près possible l'un de l'autre. La partie du tuyau de conduite sur laquelle ils se posent traverse une cloison qui sépare les deux biefs, c'est-à-dire les réservoirs en communication avec l'un et l'autre de ces biefs, un des tubes verticaux étant en amont de cette cloison, et l'autre étant en aval. On conçoit donc qu'une cloison en fonte, du moins sur une certaine hauteur, vaut mieux qu'un mur pour la séparation dont il s'agit. Il est en effet facile de voir que plus il y aura de distance entre ces deux tubes mobiles, plus il y aura de force vive perdue dans la colonne liquide comprise entre eux. Cependant il faut que le liquide ait autour de ces tuyaux l'espace libre nécessaire pour entrer ou sortir.

Je me suis d'abord occupé des moyens de faire marcher cet appareil de lui-même, c'est-à-dire de manière que l'éclusier n'eût à intervenir que pour la mise en train. Mais je me suis aperçu que si le tuyau de conduite a une longueur développée assez grande, le nombre de périodes de l'appareil peut être tellement diminué, qu'une marche automatique serait tout à fait sans importance.

Je n'entrerai donc ici dans aucun détail à ce sujet, d'autant plus qu'il serait difficile peut-être d'expliquer sans figure les dispositions étudiées relativement à cette marche automatique, qui n'est plus d'ailleurs qu'un objet de curiosité depuis que MM. les Ingénieurs des Ponts et Chaussées, qui ont fait un Rapport sur ce système, pensent, ainsi que moi, qu'il est inutile de s'occuper de ce détail.

Il résulte d'ailleurs de la suppression des dispositions que j'avais d'abord adoptées pour ce point secondaire, que l'éclusier aura beaucoup moins d'efforts à faire pour manœuvrer les tubes verticaux mobiles, parce que le diamètre de ces derniers pourra ne pas différer bien sensiblement de celui du grand tuyau de conduite, et même à la rigueur ne pas en différer du tout. Ainsi, dans le Mémoire sur une ma-

chine élévatoire à tube oscillant que j'ai publié en 1862, dans le tome VII, 2e série, du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, j'ai montré comment, en élargissant le tube vertical au-dessus d'un anneau inférieur de même diamètre que la conduite, on obtenait un mouvement automatique. J'ai d'abord exécuté une disposition semblable pour le tube mobile d'aval de ce système d'écluses, et j'ai obtenu ainsi une marche automatique d'une manière très-simple pour les dernières périodes par les mêmes principes que dans le Mémoire précité. Mais il en résultait que pour les premières périodes l'éclusier avait plus de peine à lever ce tube, à cause de la pression de la colonne liquide verticale qu'il contient sur son anneau inférieur de même diamètre que la conduite.

Si, au contraire, on réduit la pression intérieure à ce qui peut être commode pour maintenir la fermeture du tube mobile sur son siége, il sera évidemment beaucoup moins difficile de le lever. Si même on supprime entièrement cette pression intérieure en donnant au tube mobile le même diamètre qu'à la conduite, pour ne lui faire presser son siége inférieur qu'en vertu de son poids d'ailleurs plus ou moins équilibré, on pourra au besoin assurer la fermeture dont il s'agit, quand l'appareil ne marchera pas, en appuyant sur son sommet au moyen d'une pièce articulée facile à ôter lorsqu'on voudra le faire marcher, et qui, en temps utile, pressera, au moyen d'un contre-poids manœuvré par un cric, le sommet du tube mobile. J'ai remis les dessins des divers détails de cette écluse au Ministère des Travaux publics, et comme elle sera prochainement appliquée sur un canal, je me borne ici à une simple exposition de principes, ne doutant pas d'ailleurs que les études auxquelles cette application va donner lieu ne doivent révéler de nouveaux phénomènes quant à certains détails.

Il est intéressant de remarquer que si, pour le tube d'amont, il n'est pas indispensable de prendre des précautions afin qu'il s'appuie sur son siége en vertu d'une pression du liquide autour de son pied, garni au besoin d'un rebord extérieur, il y a une raison pour laquelle, du moins dans les premiers temps où cette machine sera employée, il pourra être utile de conserver une partie de cette pression pour le tube d'aval. En effet, si l'on ne veut pas ajouter un clapet au système pour faire entrer de l'eau du bief d'aval, quand il y aura une certaine

vitesse acquise dans le tuyau de conduite, il faudra que le tube vertical d'aval se lève avant que l'eau en mouvement soit trop descendue dans la conduite, où il est évidemment plus qu'inutile d'introduire de l'air. Or, si le tube vertical d'aval a un diamètre plus grand que son anneau inférieur, quand l'eau qu'il contient sera descendue assez bas en suivant celle du tuyau de conduite pour ne plus presser aussi fortement cet anneau inférieur, le tube dont il s'agit pourra se lever de lui-même au moyen d'un contre-poids, sans que l'on ait à craindre une distraction de l'éclusier.

Le calcul semble indiquer que si le versement se fait en même temps au sommet des deux tubes verticaux pour l'eau qui rentre au bief supérieur, il devrait y avoir plus d'avantage que si le versement se faisait au sommet d'un seul. Cependant, quand l'expérience a été faite en versant l'eau élevée par un seul tube avant que celui d'amont fût posé, l'effet utile en eau relevée n'a pas été sensiblement moindre qu'après la pose de ce second tube. Cela peut provenir des pertes quelconques résultant de ce qu'à chaque période les deux tubes verticaux doivent se vider, et surtout de ce que, dans les premières périodes, les oscillations en retour étant loin de les vider jusqu'au bas, le reste de ce qu'ils contiennent d'eau au-dessus du niveau du bief d'aval tombe dans ce bief sans être utilisé.

Il résulte de là que plus le tuyau de conduite sera long, plus l'avantage indiqué par la théorie dont je viens de parler devra être appréciable; de sorte qu'il est probable qu'on pourra diminuer la perte de force vive en ajoutant dans le réservoir d'amont un tube vertical fixe ayant seulement pour but de diminuer les vitesses de sortie du liquide versant dans le bief supérieur à cette époque de l'opération, comme si ce versement se faisait par un orifice évasé, quoiqu'il faille ici tenir compte de l'effet des coudes.

Sans entrer encore dans ces détails, je dois rappeler que des expériences sur un modèle de cette écluse ont été l'objet d'un Rapport favorable au Conseil général des Ponts et Chaussées en 1849, par M. Belanger, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. La Commission dont il était rapporteur avait constaté que ce système épargnait environ les trois cinquièmes de l'éclusée. En 1851, des expériences furent faites plus en grand, mais seulement sur une écluse de petite navigation.

Elles ne firent, quant à l'effet utile, que confirmer les expériences sur le modèle précité. Elles furent l'objet d'un Rapport favorable par feu M. Méquet, inspecteur général des Ponts et Chaussées. Des expériences beaucoup plus en grand ont été faites depuis sur ce système, et elles ont été l'objet d'un Rapport favorable dont un extrait officiel, revêtu de la signature de M. Dumoustier, chef de division au Ministère des Travaux publics, est joint au présent Mémoire. Mais il est intéressant d'ajouter aux chiffres notés par la Commission le simple énoncé du résultat obtenu quand l'appareil était encore en meilleur état, ayant été longtemps abandonné par suite de causes de force majeure entièrement étrangères à l'état de la question.

L'effet utile a été notamment augmenté quand l'appareil était neuf, et quoiqu'il soit prudent de s'en tenir à des chiffres moins élevés dans la pratique, il est intéressant de conserver la trace des principaux résultats obtenus.

Dans les petits modèles ou dans les appareils où le tuyau fixe n'est pas assez long par rapport à la chute, il est beaucoup plus difficile de régler les périodes, parce que l'inertie de l'eau qui se met en mouvement dans ce tuyau de conduite fixe n'en laisse pas le temps. Il en résulte qu'on laisse l'eau acquérir trop de vitesse, notamment dans les premières périodes, où agit la plus grande partie de la hauteur de chute.

Cela était facile à voir dans certains cas, à l'époque où l'écluse se vidait, en jetant de l'eau par le sommet d'un tuyau vertical. Dans les nouvelles expériences, le tuyau de conduite fixe a 1 mètre de diamètre intérieur et environ 42 mètres de long. La chute étant d'environ $1^m,60$ et ayant même été notablement plus grande dans diverses expériences, on a mieux saisi le temps nécessaire pour lever chaque tuyau mobile, en un mot, pour faire les manœuvres de manière à ne pas laisser échapper à chaque période plus d'eau qu'on ne le veut; aussi, en vidant l'écluse, on a relevé les deux cinquièmes de l'éclusée. Il est vrai que dans ce cas on avait notablement augmenté le nombre des périodes.

La seconde partie de l'appareil, nécessaire pour remplir l'écluse, en tirant une partie de l'eau du bief d'aval, n'a pas encore été essayée en grand, à cause de difficultés locales résultant des dispositions des an-

ciens bassins de Chaillot, qui étaient sur le point d'être démolis; mais il résulte des phénomènes suffisamment étudiés dans les expériences sur un modèle, que l'effet utile de cette seconde opération ne peut pas différer beaucoup de celui de la première, d'autant plus que pour le modèle dont il s'agit, l'effet utile quant à la vidange ne différait pas beaucoup de celui qui a été constaté par la Commission pour la vidange faite au moyen du plus grand appareil.

De sorte que l'épargne totale résultant des deux opérations ne pourrait pas être moindre probablement que les quatre cinquièmes environ de l'éclusée, si l'on voulait multiplier les périodes dans le cas où l'on en aurait le temps. Quant à l'effet utile maximum de l'opération faite en grand dans ces conditions, je n'ai pas cru devoir m'en rapporter à moi-même; il a été vérifié en mon absence par M. Briquet, conducteur principal des Ponts et Chaussées en retraite, très-estimé dans ce corps, qui m'autorise à m'appuyer sur son témoignage. Mais il ne faut pas oublier qu'il ne s'agit pour ce maximum que du cas exceptionnel où les périodes pourraient être assez nombreuses. Aussi, je ne fais que l'indiquer ici.

Dans le système tel que je l'avais présenté d'abord, l'eau relevée au bief supérieur ne devait sortir que par un seul orifice. J'ai déjà fait quelques essais d'une manœuvre nouvelle au moyen du versement au sommet des deux tubes verticaux, et j'espère encore résoudre ainsi une difficulté très-bien comprise dans le savant Rapport de M. l'ingénieur en chef Belanger.

Il paraîtrait utile en principe d'évaser l'extrémité d'aval du tuyau de conduite, destiné à recevoir un tuyau vertical mobile rejetant alternativement de l'eau au bief supérieur, à l'époque où l'écluse se vide. Mais on se demandait si l'augmentation de diamètre qui en résulterait pour ce tube mobile, etc., n'augmenterait pas la difficulté de la manœuvre. Maintenant l'eau peut sortir, non-seulement par le sommet de ce tube, mais par le sommet d'un autre tube disposé sur le tuyau de conduite fixe, dans une capacité remplie d'eau en communication avec celle du bief supérieur; et quoique jusqu'à présent cela n'ait point paru conduire à un effet utile plus grand, il y a lieu d'espérer que cela y conduira quand on aura encore diminué le nombre des périodes par une augmentation de longueur du tuyau de conduite.

Cette augmentation de longueur a jusqu'à présent été une cause d'augmentation de l'effet utile, et j'en ai tenu compte dans les derniers projets que j'ai soumis à l'administration des Ponts et Chaussées. Cependant je ne propose pas encore un troisième tuyau vertical entièrement fixe, dont j'ai cru devoir dire quelques mots ci-dessus parce qu'il est intéressant de conserver la trace de cette idée, abstraction faite même de son utilité immédiate.

Mais sans entrer ici dans plus de détails, je vais donner les résultats principaux des expériences faites sur le système réduit à sa plus simple expression, aux anciens bassins de Chaillot, par une Commission d'ingénieurs des Ponts et Chaussées. On avait disposé les choses de manière à opérer comme si l'on avait eu à sa disposition une écluse de navigation d'une section analogue à celle des écluses du canal du Centre. On n'entrera pas d'ailleurs ici dans des détails secondaires, qui seront ultérieurement donnés dans des recueils spéciaux, et ne sont pas indispensables pour l'exposition des principes essentiels.

Résumé du Rapport adressé à S. Exc. M. le Ministre de l'Agriculture, du Commerce et des Travaux publics, sur le fonctionnement d'une machine hydraulique présentée par M. de Caligny, et ayant pour objet :

1° *Pendant la vidange des écluses, de faire remonter dans le bief d'amont une partie des eaux du sas;*

2° *Pendant le remplissage, de se servir dans une certaine proportion des eaux du bief d'aval pour coopérer à ce remplissage.*

« Le Rapport dit au début quelles ont été les dispositions prises dans les bassins de Chaillot pour y faire une application du mécanisme inventé par M. de Caligny; il donne ensuite la description de ce mécanisme, et s'explique sur la manière dont il faut le faire fonctionner; il constate qu'eu égard aux dimensions des bassins, aux volumes d'eau employés, à la longueur et au diamètre de la conduite qui fait communiquer le bief d'amont avec celui d'aval, les résultats des expériences peuvent être considérés comme étant très-sensiblement les mêmes que ceux qu'on obtiendrait dans la pratique ordinaire.

» Il rend compte ensuite des expériences faites sous les yeux de la Commission.

» Eu égard aux dispositions locales adoptées pour ces expériences, la chute de l'amont à l'aval doit être considérée comme ayant une valeur de $1^m,58$.

» Le nombre de périodes employé pour faire fonctionner l'appareil a été de douze; la durée moyenne de chacune a été de 32 secondes, la durée totale du fonctionnement a été de $6^m\ 20^s$.

» Pendant ce temps, le niveau de l'eau dans le sas s'est abaissé de $1^m,16$.

» La quantité d'eau relevée a été de 82 mètres cubes, celle de l'eau dépensée $200^{mc},30$, de sorte que le rapport de l'une à l'autre est de 41 pour 100.

» Le fonctionnement de l'appareil a été arrêté après la douzième période, parce qu'en ce moment la quantité d'eau relevée a été jugée à peu près insignifiante, et que si l'on avait voulu continuer la vidange par ce moyen, il aurait fallu prolonger la durée de l'opération dans une proportion inconciliable avec les besoins d'un service de navigation.

» Il suit de là que, pour une chute de $1^m,58$, la considération du temps ne permet pas de se servir de la machine au delà de l'abaissement de $1^m,16$. C'est pour cet abaissement seulement que l'effet utile est de 41 pour 100; mais pour que le sas soit complétement vidé, il faut encore écouler une tranche de $1^m,58 - 1^m,16$, soit $0^m,43$, qui représente un volume de 74 mètres cubes, lequel, ne pouvant plus être utilement extrait par l'appareil, devra s'écouler par les moyens ordinaires.

» En résumé, l'éclusée totale se trouve composée, savoir :

1° De la quantité d'eau ci-dessus vidée pendant le fonctionnement de l'appareil..........................	$200^{mc},30$
2° De celle évacuée à la fin par les moyens ordinaires....	74 00
Total..........................	$274^{mc},30$

» En conséquence, le rapport définitif de l'effet utile à l'effet total est mesuré par la fraction $\frac{82}{274,3}$, soit 30 pour 100.

» La Commission exprime l'avis que ce chiffre doit être considéré

comme un minimum, parce que des pertes d'eau évidentes existent dans l'appareil construit depuis trois ans, dans des conditions d'exécution assez grossières.

» M. de Caligny ayant exprimé l'opinion qu'il y aurait de l'avantage à prolonger la durée de chaque période, il a été procédé sous les yeux de la Commission à une nouvelle expérience : la chute de l'amont à l'aval a été de $1^{m},38$.

» Le nombre de périodes a été de sept, dont la durée moyenne a été de 37 secondes; le temps total employé a été de $4^{m}\ 19^{s}$. Le niveau de l'eau dans le sas a baissé de $1^{m},18$; le débit total est donc de $202^{mc},96$, et comme on a relevé $76^{mc},14$ d'eau, il s'ensuit que le rapport de l'effet utile à l'effet total est de 37 pour 100. Si l'on a égard à ce que la chute était moindre cette fois que la première, on trouve qu'à conditions égales les mesures des effets seraient sensiblement équivalentes.

» Mais on a sensiblement gagné au point de vue du temps, puisqu'on n'a employé que $4^{m}\ 19^{s}$ au lieu de $6^{m}\ 20^{s}$ pour un abaissement qui même a été un peu plus grand dans le second cas que dans le premier.

» On a en outre gagné en ce que la tranche de fond à évacuer par les moyens ordinaires n'a été que de $0^{m},20$ de hauteur au lieu de $0^{m},43$.

» Somme toute, l'éclusée complète représente cette fois $237^{mc},36$; l'eau est élevée de $76^{mc},14$: l'effet utile a donc pour mesure la fraction $\frac{76,14}{237,36}$, soit 32 pour 100.

» En résumé, en prolongeant la durée des périodes, on a eu, même pour une chute moindre, un effet utile plus grand, et on a sensiblement abrégé la durée de l'opération, ce qui confirme l'opinion exprimée par M. de Caligny.

» Relativement au remplissage du sas, la Commission n'a pu rien constater à cet égard, parce que les dispositions prises à Chaillot ne le permettaient pas.

» Mais d'après un Rapport de M. Belanger, ingénieur en chef, adressé à la date du 9 décembre 1849 à M. le Ministre des Travaux publics, l'effet utile pendant l'opération du remplissage serait de 28 pour 100.

» Ce Rapport rend compte d'expériences faites sur un appareil de petit modèle dans lequel quelques dimensions ne sont pas dans une complète proportionnalité avec celle des appareils établis à Chaillot.

» La Commission ne déduit d'ailleurs de cette absence de proportionnalité aucune conclusion favorable ou contraire; elle se borne à la mentionner comme un fait, n'ayant pas eu les moyens de procéder aux essais comparatifs qui auraient pu permettre d'en apprécier l'influence.

» *Conclusions.* — Sous la réserve exprimée dans les observations qui précèdent, la Commission pense que l'appareil de M. de Caligny est d'une conception ingénieuse et simple; qu'il pourrait offrir dans certains cas les moyens de réduire la consommation d'eau sur les canaux de navigation, et qu'à ce titre il mérite de fixer l'attention de l'Administration.

» Elle est, en conséquence, d'avis qu'il y a lieu d'engager M. de Caligny à rechercher sur un de nos canaux une localité placée dans des conditions favorables, à se mettre en rapport avec les ingénieurs de ce canal et à se concerter avec eux, soit sur les dispositions à prendre, soit sur les dépenses à faire pour l'établissement de sa machine auprès d'une écluse.

» Ce n'est que lorsque ces renseignements lui seront parvenus que l'Administration sera à même de se prononcer sur l'application qu'il pourrait y avoir lieu de faire de l'appareil de M. de Caligny aux canaux dans lesquels les moyens d'alimentation sont insuffisants, et pour lesquels il importe particulièrement de diminuer la consommation d'eau.

» Le rapporteur de la Commission,

» *Signé:* VALLÈS.

» Pour copie conforme :

» Le chef de division,

» *Signé :* DUMOUSTIER. »

« Paris, le 6 juin 1866.

» Monsieur, la Commission qui a été chargée d'expérimenter dans le bassin de Chaillot l'appareil hydraulique de votre invention vient de me faire parvenir son Rapport.

» La Commission a reconnu que cet appareil, d'une conception ingénieuse et simple, pouvait offrir dans certains cas les moyens de réduire dans une proportion importante la consommation d'eau sur les canaux de navigation, et elle a pensé qu'il y avait lieu de vous engager à rechercher une localité placée dans des conditions favorables où l'application de votre machine pourrait avoir lieu à titre d'essai auprès d'une écluse.

» J'approuve, Monsieur, la proposition de la Commission, et je m'empresserai de donner les instructions nécessaires aux ingénieurs avec lesquels vous vous serez mis en rapport pour arrêter de concert, soit les dispositions à prendre, soit les dépenses à faire pour l'établissement de votre machine auprès d'une écluse.

» Recevez, Monsieur, l'assurance de ma considération très-distinguée.

» Le Ministre de l'Agriculture, du Commerce et des Travaux publics,

» *Signé* : ARMAND BÉHIC. »

Les usages de l'Administration ne permettant pas, à ce qu'il paraît, de communiquer officiellement aux auteurs les Rapports entiers, je n'ai pu être autorisé qu'à publier les deux pièces précédentes, relatives au Rapport beaucoup plus étendu fait sur mon travail. Mais ce qui précède me paraît suffire, surtout si l'on en fait prochainement une grande application sur un canal de l'État.

Études sur les oscillations de grandes nappes liquides faites depuis la rédaction du Rapport.

Quand un bief est extrêmement court, il ne s'agit pas seulement d'épargner l'eau par l'ensemble des deux opérations de remplissage et de vidange. Il faut que, pendant le remplissage, la quantité d'eau prise au bief d'amont n'y fasse point baisser le niveau de manière à faire toucher les bateaux qui s'y trouvent, quand même la quantité d'eau restituée au bief d'amont pendant la vidange serait aussi grande qu'on pourrait le désirer.

Si l'on dispose à l'extrémité du contre-fossé, près du bief d'aval, une sorte de grand clapet, pouvant d'ailleurs au besoin se fermer de lui-même au moment voulu, on peut transformer par ce moyen ce contre-fossé en une sorte de *bassin d'épargne*, dont les parois sont supposées s'élever au besoin à une hauteur convenable, même au-dessus de ce grand clapet.

Cette disposition peut être utilisée de plusieurs manières : d'abord, même dans le cas où l'on n'aurait pas à se préoccuper d'un bief d'amont très-court, à partir du moment où l'appareil de vidange ne relèvera plus que peu d'eau au bief supérieur, on pourra encore utiliser en partie la tranche d'eau qui restera dans l'écluse.

Quand même il n'y aurait pas à considérer l'effet du mouvement acquis dans le grand tuyau de conduite pendant qu'on versera de l'eau de cette tranche dans cette espèce de bassin d'épargne, on conçoit déjà qu'on pourrait épargner une portion de cette tranche pour la faire ensuite rentrer en partie dans l'écluse quand on voudra remplir celle-ci.

Mais il est intéressant de remarquer que l'écoulement de l'eau du sas ne peut se faire sans engendrer dans le grand tuyau de conduite de la force vive, d'où il résultera que le niveau baissera dans l'écluse au-dessous de celui de l'eau entrée dans le bassin d'épargne.

Lorsque ensuite, après avoir fait sortir par les moyens ordinaires ce qui restera d'eau dans le sas, on voudra commencer le remplissage de ce dernier, on obtiendra du fossé de décharge vers le sas une grande oscillation qui fera baisser l'eau dans cette espèce de bassin d'épargne

au-dessous du niveau de celle qui entrera dans le sas. Quant à l'eau qui restera dans le contre-fossé au-dessus du niveau du bief d'aval, à partir du moment où l'appareil de remplissage fonctionnera, on aura à la puiser moins bas que le niveau du bief d'aval, dont ensuite le clapet pourra au besoin s'ouvrir de lui-même quand l'eau sera suffisamment baissée dans le contre-fossé.

Considérons maintenant d'une manière plus spéciale le cas où le bief d'amont est extrêmement court. Pour ce cas, il ne paraît pas même indispensable que le contre-fossé, pouvant alors être complétement transformé en bassin d'épargne, communique par un clapet avec le bief d'aval.

Au lieu de jeter dans ce dernier bief la partie de l'éclusée qui, pendant le jeu de la machine de vidange, ne sera pas relevée au bief supérieur, on pourra la laisser tomber dans le bassin d'épargne. On en relèvera moins au bief supérieur, par la raison même que le niveau s'élèvera dans ce bassin d'épargne. Mais on pourra diviser les effets de manière à avoir beaucoup moins d'eau à tirer du bief supérieur pendant la durée de la partie de l'opération consacrée au remplissage du sas, à cause de la quantité d'eau qu'on trouvera dans ce bassin latéral.

Il faut d'ailleurs remarquer qu'on peut y faire élever l'eau plus haut que dans le sas, parce qu'à partir de l'époque où l'appareil de vidange ne marchera plus utilement, à cause du rapprochement des niveaux montant et descendant, on pourra encore jeter, d'une manière analogue à ce qui a été expliqué ci-dessus, une quantité d'eau considérable du sas dans ce bassin par une grande oscillation.

Lorsqu'on voudra remplir l'écluse, l'eau du bassin d'épargne y entrera tout naturellement avant qu'on fasse marcher l'appareil. Mais en y entrant elle engendrera une grande quantité de force vive dans le tuyau de conduite, et il en résultera, comme on le conçoit d'après ce qui a été dit ci-dessus, que l'eau montera dans l'écluse à une certaine hauteur au-dessus du niveau où elle descendra dans le bassin d'épargne. Si l'on fait ensuite marcher l'appareil de remplissage, il faudra tenir compte de ce que l'eau restée dans le bassin d'épargne se trouvera à un niveau plus élevé que celui du bief d'aval, de sorte qu'on aura à la puiser de moins bas que si elle était tirée de ce dernier bief.

Le bassin de communication entre le bief supérieur et la tête de la machine peut être utilisé d'une manière intéressante par deux grandes oscillations, l'une de haut en bas à la fin du remplissage de l'écluse, l'autre de bas en haut au commencement de la vidange.

Quand l'appareil de remplissage ne marche plus assez utilement à cause du rapprochement du niveau qui s'y élève, il suffit de lever le tube vertical qui établit alternativement la communication entre ce bassin et l'écluse, pour jeter encore une quantité d'eau considérable dans cette dernière, sans la prendre au bief d'amont, si la communication entre ce bief et ce bassin est interrompue en temps utile au moyen d'une sorte de grand clapet ou de porte de flot.

Lorsque ensuite on voudra vider l'écluse, on pourra profiter de la baisse produite dans ce bassin intermédiaire par l'oscillation dont on vient de parler pour obtenir, avant de mettre l'appareil de vidange en train, une première grande oscillation de vidange qui fera évidemment sortir d'autant plus d'eau du sas, qu'elle aura trouvé le niveau plus bas dans le bassin dont il s'agit.

On peut, au reste, modifier ces effets en considérant la question de la manière suivante. On pourra achever complétement le remplissage du sas à partir du moment où l'appareil ne marchera plus d'une manière assez utile au moyen d'une seule grande oscillation, si l'on ne ferme pas immédiatement la communication entre ce bassin intermédiaire et le bief d'amont. On conçoit en effet que si l'écoulement de ce bassin vers l'écluse est entretenu pendant un temps convenable et que la communication entre ce bassin et le bief d'amont soit fermée à un instant voulu, les choses pourront être calculées de manière qu'il se fasse dans ce bassin une baisse considérable qui ne se terminera qu'à l'époque où le sas sera rempli.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer, abstraction faite des avantages qui résulteront pour l'effet utile des considérations précédentes, que le niveau étant ainsi baissé autour du tube vertical précité, il sera plus facile d'éviter les pertes d'eau pendant que l'appareil sera en repos, si le clapet d'amont est bien construit.

Pour le cas d'un bief d'amont très-court, il est intéressant que ce bassin intermédiaire ait une assez grande étendue, afin que la grande oscillation de remplissage dont on vient de parler puisse faire baisser

le moins possible le niveau dans ce bief. Quelques expériences seront nécessaires pour étudier les effets de ces oscillations sur d'aussi grandes nappes liquides; mais on en a déjà une idée par celles qui ont été faites au moyen de l'appareil effectuant l'opération de vidange ou de remplissage en un très-petit nombre de périodes; de sorte qu'il est déjà possible de se former une idée assez approximative de ce genre d'effets, pour lesquels il faut tenir compte de la perte de force vive aux extrémités du système, quand l'eau sort d'un tuyau de conduite en rencontrant des sections si larges par rapport à celle de ce tuyau, qu'on doit regarder comme perdue en général la vitesse de sortie de l'eau; ce qui, dans certaines limites, permet cependant d'utiliser la force vive de la colonne liquide en mouvement dans le grand tuyau, et d'autant mieux que les dimensions de ce dernier sont plus considérables.

Dans l'état où la machine a été essayée, il y a une cause de perte de force vive d'autant plus sensible qu'on veut vider l'écluse plus vite. L'eau, en se versant au bief supérieur, monte au-dessus du sommet des tubes, à une hauteur d'autant plus sensible qu'il y a alors plus de vitesse dans le tuyau de conduite. Or, cet inconvénient sera atténué, quant à la partie du déchet provenant de l'appareil proprement dit, lorsque avant de mettre l'appareil en train on commencera la vidange par une grande oscillation dans le réservoir destiné à mettre alternativement le tuyau de conduite en communication avec le bief supérieur.

En effet, abstraction faite des avantages précités de cette grande oscillation, elle ne peut se faire sans occasionner une baisse de l'eau dans l'écluse, où par conséquent le niveau se trouvera tout naturellement au-dessous de celui du bief d'amont; de sorte que l'on se trouvera, pour la première période de la machine, dans des conditions analogues à celles où l'on était, à l'époque des expériences, pour l'une des périodes suivantes, dont les jets s'élevaient beaucoup moins au-dessus du sommet des tubes verticaux que pour la première.

Ce que je viens de dire peut servir à fixer les idées sur ce genre d'effets sans qu'on en fasse encore le calcul, qui dépendra des dimensions du réservoir intermédiaire dont il s'agit. On conçoit combien, avant des expériences directes sur ces grandes oscillations de *nappes*

liquides, il est difficile de bien préciser les effets. Mais il est intéressant de montrer d'une manière générale comment les diverses parties du déchet peuvent être modifiées dans les diverses parties de la manœuvre.

Application aux écluses multiples, et notamment aux écluses doubles.

L'avantage de ce système consiste principalement en ce qu'il coûtera beaucoup moins cher pour épargner l'eau dans les écluses de navigation existantes que d'autres moyens proposés par divers auteurs ou par moi-même. Il paraît d'ailleurs ne pas devoir occasionner une dépense proportionnelle au nombre de sas accolés.

S'il suffit que chaque sas se vide ou se remplisse en un même temps donné, je veux dire si les sas sont égaux, et si l'un ne prend pas plus de temps que l'autre pour le remplissage ou la vidange, la vitesse de l'écoulement dans un sens ou dans l'autre sera la même pour chaque sas, et par conséquent quelle que soit la chute totale de leur ensemble.

Il en résulte que la moyenne des hauteurs dues aux vitesses d'écoulement sera d'autant moindre, par rapport à la chute totale, que cette dernière sera plus grande. Il est vrai, comme on verra plus loin, que la longueur du tuyau de conduite sera augmentée s'il y a un plus grand nombre de sas accolés; mais il résultera de ce que je viens de dire une diminution dans la somme d'une partie des pertes de force vive. Il y a donc lieu d'espérer qu'en définitive on pourra, dans certaines limites, diminuer au besoin le diamètre de ce tuyau de conduite. On n'aura d'ailleurs qu'une seule tête de machine pour tous les sas accolés.

Je suppose d'abord qu'il ne s'agit que de deux sas accolés; on pourra y appliquer l'appareil tel qu'il a été essayé pour une écluse simple, du moins si les sas n'ont chacun que des hauteurs modérées. Le réservoir destiné à mettre l'appareil en communication avec le bief supérieur sera disposé en amont du sas le plus élevé, et latéralement comme pour une écluse simple. Ce réservoir et la tête de l'appareil seront d'ailleurs disposés comme si le sas le plus élevé avait la hau-

teur de la chute totale des deux sas. Les choses peuvent à la rigueur ne différer en principe qu'en ce que l'autre extrémité du tuyau de conduite devra se bifurquer de manière à pouvoir être mise alternativement en communication avec chacun des deux sas, l'autre sas étant alternativement isolé par un mode de fermeture convenable.

Il est facile de voir, au moyen de cette disposition générale, qu'on peut vider le sas supérieur en relevant une partie de l'eau au bief d'amont et remplir le sas inférieur en tirant une partie de l'eau du bief d'aval. Dans l'une et l'autre opération, la chute motrice sera bien plus grande que pour une écluse simple, à cause de l'augmentation de hauteur de chute provenant de l'un ou l'autre sas; de sorte que la fraction de l'éclusée relevée au bief d'amont et la fraction de l'éclusée tirée du bief d'aval seront l'une et l'autre bien plus grandes que pour une écluse simple.

Il est à remarquer d'ailleurs que pour une écluse simple, le système ne peut marcher utilement que pendant une fraction de la durée totale de chaque opération de remplissage ou de vidange, parce qu'à partir de l'époque où la différence des niveaux qui se rapprochent est diminuée au delà de certaines limites dans l'un et l'autre cas, l'avantage de la continuation de l'emploi de l'appareil serait plus que compensé par la perte de temps. Or, pour les écluses à deux sas accolés, l'appareil peut marcher utilement, pour le cas précité, jusqu'à la fin de chaque opération pour chaque sas, parce qu'à la fin de chaque opération il restera encore une chute motrice exprimée par toute la hauteur de l'autre sas; de sorte qu'il n'est pas même nécessaire d'achever la vidange ou le remplissage par les moyens ordinaires.

C'est surtout pour le cas où un bateau monte en trouvant les deux sas vides qu'il est utile d'épargner l'eau; il est déjà facile de voir, au moyen de ce qui précède et des expériences faites sur une écluse simple, qu'une écluse à deux sas accolés ne dépensera pas plus d'eau qu'une écluse simple du système en usage, et qu'elle en dépensera même probablement beaucoup moins.

Quant au remplissage du sas supérieur, si l'on commence avec l'appareil, on sera obligé de s'arrêter plus tôt que pour une écluse simple, parce qu'il faudra que l'eau du bief d'aval commence par monter à une hauteur égale à celle du sas inférieur. J'ai donc cherché à tirer

du sas inférieur, supposé plein, une partie de l'eau qui doit remplir le sas supérieur.

Un tuyau de conduite beaucoup moins long que le premier peut mettre en communication le sas inférieur avec un réservoir intermédiaire, disposé près de la tête de la machine. On conçoit que si l'eau du bief supérieur, en entrant dans le sas le plus élevé, a engendré de la force vive dans le plus long tuyau de conduite, et si l'on interrompt la communication entre ce tuyau et l'eau du bief supérieur pour l'établir entre ce même tuyau et ce réservoir intermédiaire, l'eau qui entrera dans le système, en vertu de la vitesse acquise dans ce grand tuyau de conduite, viendra du sas le moins élevé au lieu de venir du bief inférieur, et sera par conséquent puisée à un niveau moins bas.

L'application de cette disposition secondaire, surtout aux écluses à plus de deux sas accolés, devra être étudiée par l'expérience. Mais on conçoit, d'après ce qui a été dit, que l'appareil pourrait, à la rigueur, marcher à peu près comme s'il n'y avait qu'un seul sas ayant toute la hauteur de sa chute, c'est-à-dire que si les sas sont nombreux, presque toute l'eau du plus élevé sera relevée au bief supérieur. Presque toute l'eau du sas le plus inférieur sera puisée au bief d'aval. Les sas les plus élevés ne tireront pas d'eau du bief d'aval; les sas les moins élevés ne relèveront pas d'eau au bief d'amont. Ce n'est guère que pour les écluses à deux sas qu'il n'en sera pas ainsi, sauf l'emploi de moyens plus délicats que je me réserve d'indiquer ultérieurement.

Il y a une remarque essentielle à faire pour les sas accolés assez nombreux. Si, pour les écluses à deux sas, les deux tubes verticaux de la tête de l'appareil peuvent être mobiles en entier, comme pour une écluse simple, il ne peut pas évidemment en être ainsi pour les chutes dépassant certaines limites.

Dans ce dernier cas, ces tubes verticaux ne peuvent être mobiles, à l'exception d'une vanne cylindrique ou soupape de Cornwall, disposée à l'extrémité inférieure de chacun d'eux. Il sera même intéressant, afin d'éviter de faire parcourir à l'eau un chemin inutile, pour des chutes assez grandes, de supprimer la partie de ces tuyaux supérieure à ces vannes ou soupapes. Mais alors on bouchera le sommet de la petite partie fixe restante, et par conséquent il deviendra nécessaire de prendre certaines précautions dans la manœuvre, pour qu'il

n'y ait pas de coups de bélier; car on n'aura plus, comme pour les écluses simples et les écluses doubles, cet avantage que les sections transversales ne puissent jamais être bouchées.

C'est donc principalement pour les écluses simples et les écluses doubles que le principe apparaît plus spécialement dans toute sa simplicité. Pour ces deux genres d'écluses on peut appliquer de diverses manières les principes des grandes oscillations de nappes liquides.

Ainsi, il est clair qu'on pourra achever le remplissage du sas le plus élevé d'une écluse double au moyen d'une grande oscillation de haut en bas dans le réservoir de communication, entre la tête de la machine et le bief supérieur. Quand on videra le sas inférieur, on profitera de la baisse du niveau dans ce réservoir par suite de cette grande oscillation.

On pourra ensuite, en faisant gonfler l'eau, comme je l'ai expliqué, dans la rigole de décharge, alternativement transformée en bassin d'épargne, au moyen d'une sorte de grand clapet inférieur plutôt qu'au moyen d'une porte de flot, jeter par une grande oscillation une masse d'eau considérable qu'on fera rentrer en partie, quand ce sas se remplira, par une autre grande oscillation.

Quand l'eau se verse au sommet des deux tubes ou seulement de l'un d'eux, il se produit un effet très-curieux au commencement de la vidange d'une écluse simple, effet qui se produira aussi en général pour les écluses doubles, au commencement de la vidange du sas le plus élevé. Dans les premières périodes de l'appareil tel qu'il a été essayé, notamment à Chaillot, l'eau ne s'élevant qu'à une petite hauteur au-dessus du niveau variable de celle qui se trouve dans l'écluse, il s'en élève une quantité vraiment énorme par rapport à celle qui descend au bief d'aval. Il peut sembler aux personnes qui n'ont jamais vu l'appareil que, même pour la première période, on va avoir une sorte de mouvement continu.

Cet effet a paru vivement impressionner tous ceux qui en ont été témoins. Mais à mesure que l'eau descend dans l'écluse, la quantité d'eau élevée diminue et finit par être insignifiante. En principe, il est facile de voir qu'abstraction faite des pertes de force vive, le travail disponible dans l'eau qui reste dans l'écluse diminue comme le carré de sa hauteur au-dessus du niveau du bief d'aval.

Ce genre d'effet ne se présentera pas de la même manière pour les écluses multiples, du moins quand la chute totale aura une grande hauteur. Dans ce cas, il sera convenable de faire verser l'eau dans le réservoir en communication avec le bief supérieur par-dessous, c'est-à-dire en soulevant une vanne cylindrique ou soupape de Cornwall, comme j'en ai déjà dit quelques mots ci-dessus. C'est pour ce soulèvement, qui doit se faire en temps utile, de manière à éviter toute chance de coups de bélier, qu'il faudra prendre des précautions particulières dans le détail desquelles je n'entrerai pas ici.

Depuis que ce qui précède est écrit, j'apprends que l'ingénieur en chef d'un canal latéral où il ne s'agit pas d'épargner de l'eau, mais d'éviter des dangers à cause d'un bief d'amont très-court, ce qui, dans l'état actuel des choses, oblige à des retards préjudiciables aux mariniers, a remarqué aussi que dans les circonstances où un canal est rétréci, comme le sien, sur une certaine étendue, il résulte des inconvénients d'une baisse trop rapide d'un semblable bief, à cause de l'écoulement rapide qui se fait dans ces parties rétrécies quand on remplit l'écluse. Cet ingénieur, qui a été empêché l'année dernière par les inondations de s'occuper de mon projet, prépare une demande à ce sujet à l'Administration des Ponts et Chaussées. Je ne crois donc pas nécessaire d'entrer en ce moment dans plus de détails, me bornant dans ce journal à exposer clairement mes principes [*].

Détails relatifs à une communication faite par M. l'Ingénieur en chef Vallès *à la Société Philomathique de Paris.*

Depuis que ce qui précède est écrit, M. Vallès, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, a communiqué à la Société Philomathique de Paris des détails sur les expériences en grand auxquelles a été soumis en sa présence mon nouveau système d'écluses. M. Vallès est le rapporteur de la Commission d'ingénieurs des Ponts et Chaussées qui a rendu

[*] J'ai dit ci-dessus que le principal avantage que j'attribuais à ce système d'écluses était l'économie dans le capital de premier établissement. Mais je me suis aussi occupé

compte au Ministère des Travaux publics des expériences dont il s'agit. Cette communication a été faite à l'occasion de l'extrait officiel du Rapport qui a été présenté à la Société Philomathique et a été imprimé ci-dessus. Comme elle est une sorte de complément du Rapport offi-

---

d'autres systèmes d'écluses, et même M. Combes a bien voulu insérer une Note à ce sujet dans le *Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'industrie nationale*, année 1846, p. 567. Voici cette Note, qu'il a présentée comme extraite du *Bulletin de la Société Philomathique de Paris* :

Moyen de faire fonctionner sans soupape l'écluse à flotteur et à double compartiment de Busby, par M. de Caligny.

« M. Busby, ingénieur anglais, a pris le 14 avril 1813 une patente pour un moyen d'épargner l'eau dans le service des écluses de navigation ordinaires, en disposant latéralement un réservoir circulaire en communication avec l'écluse, et dans lequel un flotteur à double compartiment monte et descend alternativement pour faire monter et descendre alternativement l'eau dans cette écluse.

» Les deux compartiments de ce flotteur sont séparés par un plancher horizontal. Quand le caisson flottant dont il s'agit descend, l'eau du bief supérieur remplit graduellement le compartiment supérieur au moyen de deux siphons, et l'eau du bief inférieur remplit en même temps le compartiment inférieur à l'aide de deux autres siphons. Quand le caisson flottant remonte, l'eau de chaque bief est restituée par la manœuvre, et l'eau baisse dans l'écluse.

» Ce système, qui a le même but que l'écluse à flotteur de Betancourt, mais n'a pas besoin d'être équilibré de la même manière, fonctionne au moyen d'une force motrice quelconque suffisante pour surmonter les résistances passives et l'inertie de tout l'ensemble des masses solides ou liquides.

» Il paraît que l'auteur anglais n'a point saisi d'une manière assez complète toute la généralité du principe qui lui est dû, et qu'il s'est même trompé en cherchant à faire voir comment doit se faire la manœuvre quand on veut que le système fonctionne sans le secours de l'éclusier, et cependant sans employer de soupape. Il est vrai que, dans ce cas, la section du flotteur doit être différente de celle de l'écluse, en y comprenant la section totale de la surface liquide contenue en dehors du flotteur; mais il faut qu'elle soit plus grande au lieu d'être moindre, comme dit l'auteur.

» Voici comment M. de Caligny reprend la question :

» Si un cylindre s'enfonce dans un niveau indéfini, il suffit, pour conserver l'équilibre, qu'il reçoive une tranche d'eau toujours égale à celle qu'il déplace; mais, s'il a de plus à refouler dans le sas d'écluse une tranche d'eau égale à cette dernière, il faut qu'il reçoive encore une tranche d'eau égale. Voilà pour quelle raison il ne suffit plus que l'on tire une seule tranche d'eau du bief supérieur; il en faut aussi une seconde,

ciel, voici un extrait de la Note remise par M. Vallès sur cette communication verbale :

« M. Vallès, après avoir donné des détails sur la construction et le jeu de l'appareil dont le principe est décrit dans les extraits des procès-

---

qui est tirée du bief inférieur et entre dans le compartiment inférieur du caisson. Jusque-là ceci s'accorde avec le résultat de Busby; mais si la section de l'écluse est sensiblement moindre que celle du caisson cylindrique, la quantité de pression hydrostatique à refouler croîtra plus rapidement que celle qui est introduite dans le système par la tranche d'eau variable du bief inférieur. Il en résulte que l'écluse ne sera pas tout à fait remplie en vertu du refoulement du flotteur, en supposant même qu'au commencement de la descente un excès de poids ait rompu l'équilibre. Si donc on fixe, au moment de l'équilibre stable du système, le flotteur d'une manière quelconque et qu'on achève de remplir l'écluse au moyen de l'eau du bief supérieur, quand on voudra qu'elle se vide après l'introduction ou la sortie du bateau qu'il s'agit de faire passer, il n'y aura qu'à détacher le flotteur, parce que la pression prépondérante de l'écluse, en vertu de l'addition du bief supérieur, lui imprimera un mouvement en sens inverse pendant la durée duquel chaque compartiment rendra à chaque bief l'eau qu'il a empruntée, jusqu'à ce que le flotteur soit remonté à la hauteur dont il est descendu.

» Pour bien comprendre la manœuvre, il faut concevoir que si dans la première période le caisson est descendu, c'est parce que son poids était assez sensiblement prépondérant au commencement de la descente; on l'avait de même attaché d'une manière quelconque et lâché au moment voulu, la section de l'écluse étant déterminée de manière qu'il ne s'enfonçât qu'à une profondeur donnée, afin que l'on pût le faire revenir sur ses pas au moyen de l'addition d'une force motrice qui est le poids de la tranche d'eau tirée du bief supérieur. Or, pendant l'ascension du flotteur, la colonne liquide de l'écluse, au lieu d'être à refouler, est au contraire la force motrice; elle diminue plus vite que la colonne restituée au bief inférieur, et qui est destinée à contre-balancer la différence de principe de ce système avec celui d'un flotteur enfoncé dans un bief indéfini. Tout étant, jusqu'à un certain point, inverse dans cette seconde période, on voit que l'équilibre aura lieu lorsqu'il restera dans l'écluse une certaine hauteur d'eau. Quand l'ascension du flotteur sera finie, on l'accrochera, on videra ce qui restera dans l'écluse au-dessus du bief inférieur, et ainsi de suite quand on voudra recommencer la manœuvre pour le passage de quelque autre bateau. Si l'on n'a pas assez de force motrice pour faire remonter le flotteur à une hauteur convenable, on est libre d'en tirer une plus grande quantité du bief supérieur pendant une portion quelconque de la durée de la descente de l'eau dans l'écluse.

» M. de Caligny ajoute qu'il a toujours été effrayé de la dépense en capital nécessaire pour établir des écluses de ce genre, ainsi que des difficultés d'exécution et du peu de succès que des systèmes analogues ont eu dans la pratique; mais il n'en était pas

verbaux de la Société, a remarqué particulièrement la facilité et la simplicité du jeu de ce système, disposé de manière que non-seulement il ne peut jamais y avoir de coups de bélier, parce que les sections transversales ne sont jamais bouchées, mais que les herbes charriées par les canaux ne peuvent jamais l'obstruer. La manœuvre est extrêmement simple, et l'opération totale de vidange ou de remplissage de l'écluse se fait avec toute la rapidité désirable.

» Si le Rapport officiel a dû faire quelque réserve relativement à l'opération du remplissage, parce que les dispositions prises à Chaillot au moment où les anciens bassins allaient être démolis n'ont pas permis de vérifier l'effet utile constaté par M. l'ingénieur en chef Belanger sur un petit modèle, M. Vallès admet parfaitement ce résultat, en comparant surtout l'effet utile obtenu pendant la vidange par les expériences sur le modèle et sur le grand appareil essayé à Chaillot. M. de Caligny a d'ailleurs fait observer depuis la rédaction du Rapport que, selon lui, s'il y avait du désavantage, ce serait, principalement à cause de diverses circonstances, l'effet utile du petit modèle qui devrait être trop faible. Il résulte d'ailleurs de détails inédits que s'il y a quelque différence de proportionnalité entre le grand et le petit modèle, les expériences sur ce dernier avaient été tellement variées, que la propor-

---

moins intéressant de montrer comment l'écluse à flotteur et à double compartiment peut être conçue de manière à empêcher toute chance d'accident dépendant de l'éclusier. Le système est alternativement réduit au repos en vertu de pressions simplement hydrostatiques, de manière qu'on n'ait pas à s'embarrasser beaucoup des difficultés relatives au règlement des niveaux. »

En reproduisant cette Note déjà ancienne, il est intéressant d'ajouter que ce système peut être appliqué, quoique avec moins d'avantage et de généralité, à ce que M. D. Girard et M. le général Poncelet ont proposé pour les écluses triples.

Au reste, mon principal but en rappelant ce système est de montrer que j'ai étudié la question sous diverses faces. Je crois toujours que par leur extrême simplicité les appareils à colonnes oscillantes, objet du présent Mémoire, auront l'avantage essentiel de coûter beaucoup moins cher; car d'après une estimation faite par M. Briquet, la dépense ne doit être que d'une dizaine de mille francs pour une écluse simple, même dans des circonstances exceptionnelles. Mais quant à l'effet utile, je conviens que si l'on n'avait pas à se préoccuper du capital de premier établissement, les écluses à flotteur dont il s'agit, étant d'ailleurs au besoin plus ou moins modifiées, épargneraient une quantité d'eau plus considérable.

tionnalité de la longueur du tuyau de conduite à la chute s'était même trouvée quelquefois en sens contraire, sans que cela eût bien sensiblement modifié le résultat.

» Quoi qu'il en soit, il est bien avéré, dit M. Vallès, que l'appareil remplit toutes les conditions désirables, et coûte d'ailleurs beaucoup moins cher que d'autres moyens proposés pour épargner l'eau dans les écluses existantes. Un autre ingénieur en chef des Ponts et Chaussées qui en propose l'application, même sur une écluse d'un canal latéral, a remarqué qu'outre les avantages d'épargner l'eau dans les canaux qui ne sont pas assez bien alimentés, ce système peut être très-utile dans le cas notamment où, le bief d'amont ayant une très-faible superficie, le produit de l'écluse d'aval fait baisser le niveau de ce bief de manière à faire craindre pour les bateaux chargés qui peuvent s'y trouver. Il peut l'être encore, selon le même ingénieur, dans le cas où une écluse est précédée immédiatement par une portion de bief rétrécie dans laquelle l'éclusée produit un courant rapide qui est une gêne réelle à la marche des bateaux montants.

» Quant à l'abaissement du niveau dans le bief d'amont, lorsque ce dernier est très-court, il faut, dans l'état actuel des écluses, lorsqu'il passe de suite plusieurs bateaux remontants, faire perdre aux mariniers un temps considérable pendant lequel l'éclusier de l'écluse supérieure donne au bassin l'eau qui en a été retirée par chaque éclusée. On conçoit d'ailleurs que s'il y a quelque négligence, il peut se joindre à cette perte de temps une cause de danger réel que l'on n'aura plus à craindre au moyen d'un système convenable d'épargne de l'eau.

» Quant à l'effet utile sur lequel s'appuie le Rapport officiel, il est intéressant de remarquer qu'il a été obtenu avant que M. de Caligny eût présenté à l'Académie des Sciences et à la Société Philomathique divers moyens de l'augmenter par de grandes oscillations de nappes liquides, étudiées par lui depuis cette époque, à l'occasion de l'application proposée en ce moment pour un bief d'amont très-court. »

Cette communication de M. Vallès rappelant plus spécialement l'attention sur les expériences en petit, à cause de la manière intéressante dont elles se coordonnent avec les expériences en grand, il m'a semblé utile d'ajouter ici quelques détails sur ces expériences en petit, qui

furent répétées en présence d'une première Commission le 20 août et le 20 novembre 1847.

Voici un extrait du Rapport inédit de M. Belanger, plusieurs fois cité dans ce qui précède, et qui a été approuvé par le Conseil général des Ponts et Chaussées en 1849 :

« ... *Expérience constatant l'effet utile de cet appareil.*

« M. de Caligny, honorablement connu depuis assez longtemps par des recherches et des expériences sur des appareils hydrauliques de son invention, qui ont de l'analogie avec celui qui fait l'objet de ce Rapport, s'est livré à des calculs qui lui permettent d'espérer que dans l'opération du remplissage, il fera monter du bief inférieur dans le sas un tiers de l'éclusée, et que dans l'opération de la vidange il fera remonter la même quantité d'eau du sas au bief supérieur. Il en résulterait qu'après avoir tiré de ce bief deux tiers de l'éclusé, on lui en rendrait un, de sorte que la dépense d'eau pour l'opération complète ne serait que le tiers de ce qu'elle est ordinairement.

» Les expériences faites sur un appareil de petites dimensions établi aux frais de M. de Caligny chez M. Barbier, plombier, rue de Seine, ont, autant qu'on pouvait l'espérer, justifié les prévisions de l'inventeur.

» Le sas était représenté par un vase rectangulaire en plomb, dont les dimensions horizontales étaient $1^m,50$ et $0^m,80$. Le bief supérieur était remplacé par un autre vase en plomb plus petit, près duquel était un tonneau de jauge qui fournissait l'eau nécessaire à la dépense de ce bief. Le contre-fossé supposé en communication avec le bief inférieur était représenté par un réservoir en plomb de $5^m,20$ de longueur et de $1^m,50$ de largeur. Le tube horizontal allant du bief d'amont au sas était un tuyau en zinc de 10 mètres de longueur et de 1 décimètre de diamètre. Sur ce grand tube, et à $0^m,215$ de distance en aval du clapet d'amont, était embranché un petit bout de tuyau vertical en plomb de $0^m,14$ de diamètre, au-dessus duquel jouait le tuyau-soupape. Celui-ci avait $0^m,16$ de diamètre, excepté à sa partie inférieure, où le diamètre était de $0^m,128$.

» Les opérations suivantes ont été faites en présence du soussigné et de M. l'ingénieur en chef Frimot :

» 1° *Vidange du sas.* — Les deux vases représentant le sas et le bief d'amont ayant été remplis de manière qu'entre eux et le bassin qui figurait le bief d'aval il y avait une différence de niveau ou chute de $0^{m},49$, M. de Caligny a ouvert le clapet d'aval et manœuvré le tuyau-soupape comme il est indiqué plus haut. Une partie de l'eau du sas est descendue en plusieurs périodes dans le bief inférieur; l'autre est remontée dans le bief supérieur, d'où elle s'est immédiatement déversée dans le tonneau de jauge. En remettant ensuite cette seconde partie dans le vase figurant le sas, on a constaté qu'elle y occupait une hauteur de $0^{m},142$. Il en résulterait que la fraction d'éclusée relevée du sas dans le bief supérieur pendant la vidange avait été de $\frac{0,142}{0,49} = 0,31$.

» Cette opération s'est effectuée en quatorze périodes, et a duré trois minutes.

» 2° *Remplissage du sas.* — Le remplissage du sas s'est fait par les manœuvres qui ont été précédemment décrites. A mesure que le vase représentant le bief d'amont fournissait son eau au sas, cette eau était remplacée par celle qu'un ouvrier puisait dans le tonneau de jauge. Le remplissage terminé, il a été constaté que l'eau élevée du bief inférieur dans le sas représentait un prisme de $0^{m},135$ de hauteur ou une fraction d'éclusée $\frac{0,135}{0,49} = 0,28$.

» La durée de cette opération et le nombre des périodes de la manœuvre ont été à peu près les mêmes que pour la vidange du sas.

» Ainsi, dans cette expérience en petit, l'épargne de l'eau pour le remplissage et la vidange du sas a été les cinquante-neuf centièmes de l'éclusée... »

Il est intéressant de remarquer que l'effet utile était un peu moindre que ne l'avait été celui de l'appareil pendant la vidange, parce que le niveau baissait notablement dans le vase représentant le bief supérieur à chaque période, et que celui du bief inférieur baissait d'environ 2 centimètres pendant le remplissage du sas, ce qui, d'une part, dimi-

nuait la pression motrice, et, de l'autre, augmentait la profondeur d'où il fallait tirer l'eau du bief d'aval.

Au contraire, dans l'opération de vidange, au commencement, le niveau de l'eau dans le bief d'aval était un peu au-dessous du niveau définitif pour l'époque où la chute était de $0^m,49$. Mais le petit avantage qui en résultait n'était peut-être pas même tout à fait compensé par l'élévation alternative de l'eau au-dessus du niveau normal du bief supérieur, parce que l'eau relevée devait ensuite se verser par une gouttière disposée au sommet du vase représentant ce bief, et d'où l'eau tombait dans un tonneau de jauge. Aussi, le Rapport n'a pas mentionné ce détail. Si j'en dis quelques mots, c'est pour montrer avec quel soin les expériences ont été faites, en tenant compte des plus petites choses. Aussi, les expériences en grand les ont vérifiées avec avantage.

Quant à la baisse alternative dans le vase représentant le bief supérieur, elle était d'environ 4 centimètres, ce qui diminue sensiblement la moyenne de la chute. Je n'entrerai pas dans plus de détails à ce sujet, voulant seulement indiquer la cause de quelques légères différences entre l'effet utile pendant la vidange et pendant le remplissage.

En augmentant la durée de l'opération, j'ai augmenté notablement l'effet utile. Cependant, j'ai rarement vu l'épargne définitive s'élever aux deux tiers de l'éclusée pour ce petit modèle. J'ai dit plus haut pourquoi l'effet utile a pu être augmenté dans les expériences en grand, à cause de la facilité de la manœuvre.

Il faut tenir compte de ce que, pour cette chute, l'appareil de petit modèle n'était pas dans son état normal, le tuyau de conduite étant alors un peu trop court par rapport à la chute. L'appareil avait d'abord été construit pour une chute de 20 à 23 centimètres. Il a été vu par la Commission dans ce premier état. L'effet utile était à peu près le même; mais il est bien à remarquer que le nombre de périodes était seulement de six pour la vidange, et de six pour le remplissage. Il pouvait même, à la rigueur, être réduit à quatre ou cinq. La durée de chaque opération de vidange ou de remplissage était de quatre-vingt-quinze secondes; elle pouvait même être notablement réduite.

Pendant le temps qui s'est écoulé entre les deux séances de la Com-

mission, j'ai diminué la longueur du tuyau de conduite, et les chutes ont, dans diverses expériences, varié de 18 à 23 centimètres. J'ai constaté que la longueur du tuyau de conduite étant réduite à 6 mètres, l'opération se faisait dans le même temps, et sensiblement avec le même effet utile que lorsque le tuyau de conduite avait 10 mètres de long, mais que le nombre des périodes était sensiblement en raison inverse de la longueur de ce tuyau. Or, si l'on admet que les dimensions homologues doivent augmenter comme celles de l'écluse, pour une hauteur de chute augmentée dans le rapport d'environ 5 à 2, on aurait dû augmenter la longueur du tuyau de conduite dans le même rapport, ce qui, pour la chute mentionnée dans le Rapport de M. Belanger, aurait réduit le nombre de périodes à cinq ou six, comme pour la chute d'une vingtaine de centimètres. Au reste, il n'est pas indispensable que le tuyau de conduite soit aussi long par rapport à la chute, comme on l'a constaté pour la vidange dans des expériences en grand.

Pour tenir compte de la résistance opposée par les bateaux, j'ai construit avec des briques un mur vertical, disposé transversalement dans le vase représentant l'écluse, à une distance de la bouche du tuyau un peu plus grande que le double du diamètre de celui-ci. Je n'ai pu noter aucune différence sensible dans l'effet utile, par suite de cette disposition.

Quant au bief d'amont, j'ai fait une disposition semblable, en y disposant une enceinte formée en maçonnerie de briques, noyée à une distance presque double du diamètre du tuyau, cette maçonnerie s'élevant d'ailleurs notablement au-dessus de ce diamètre. Je n'ai pas remarqué non plus qu'il en résultât aucune différence sensible dans l'effet utile. Si je fais cette dernière remarque, c'est seulement pour rassurer au besoin sur les petits détails de construction, car j'ai modifié la disposition de cette extrémité dans les expériences en grand, où j'ai complétement supprimé toute espèce de clapets. Je ferai donc seulement une dernière remarque.

Dans la première série d'expériences en petit vues par la Commission, l'extrémité du tuyau de conduite qui débouchait dans le bief d'amont était d'un diamètre peu différent de celui du reste de ce tuyau de conduite. Dans la seconde série d'expériences vues par la

Commission, le diamètre de cette extrémité du tuyau était de $0^{m},14$. Il se raccordait avec le reste au moyen d'un évasement dont l'angle était peu différent de celui de l'ajutage divergent de Venturi. Or, il ne paraît pas que l'addition de cet ajutage ait une influence bien sensible sur l'effet utile.

Cependant, il est prudent de remarquer qu'ici les vitesses étaient assez petites. Les phénomènes pourraient être sensiblement différents pour les vitesses qui se présenteront dans la manœuvre des grandes écluses. Malgré les différences possibles, ces observations ont été une raison pour me déterminer à ne pas évaser, jusqu'à présent du moins, l'extrémité du tuyau de conduite qui porte la tête de la machine. Quant à l'extrémité qui débouche dans l'écluse, abstraction faite de l'avantage que peut avoir cet évasement, il est important de le prescrire et même de l'exagérer, afin d'éviter les dangers qui pourraient résulter de l'introduction latérale de l'eau, quand il y a un bateau dans l'écluse.

Il ne paraît pas d'ailleurs indispensable, quant à la sûreté des bateaux, de donner au débouché du tuyau de conduite dans l'enclave des portes d'aval de l'écluse une section bien plus grande que la somme de celles des ventelles existantes, d'autant plus qu'il faut tenir compte d'une circonstance intéressante. L'inertie de l'eau du tuyau de conduite ne permet pas à cette eau de prendre la vitesse due à la hauteur de la chute. Les vitesses réelles, partant de zéro, finissent par redevenir nulles. On peut d'ailleurs, si l'on craignait un danger dans une circonstance particulière, interrompre la communication avec le bief d'amont ou celui d'aval, en baissant celui des tuyaux mobiles qui introduirait l'eau de l'un ou l'autre bief dans l'écluse au moment dont il s'agirait; car il est bien à remarquer que, même alors, aucun coup de bélier ne serait possible, les sections transversales n'étant jamais bouchées.

Description des moyens d'employer le mouvement acquis des colonnes liquides à faire ouvrir d'elles-mêmes les portes d'écluses et à faire sortir de lui-même le bateau d'un sas. — Expérience en grand faite en Belgique.

Dans ce qui précède, je n'ai considéré le mouvement acquis des grandes colonnes liquides que comme un moyen d'épargner l'eau dans les écluses de navigation. Il peut aussi être employé à accélérer d'une manière remarquable le service de ces écluses, abstraction faite de toute épargne de l'eau. J'avoue que je ne pensais pas d'abord à un mode d'accélération de la manœuvre quand j'ai donné la description générale du système, notamment dans le *Bulletin de la Société Philomathique de Paris*, journal *l'Institut,* séance du 14 décembre 1844, p. 424. Je me suis aperçu depuis que cette disposition pouvait servir, quand la machine ne marchait pas et qu'on laissait des extrémités ouvertes, à introduire avec plus de facilité le bateau descendant dans le sas plein d'eau, parce qu'en entrant il peut chasser de l'eau par le tuyau de conduite, tel d'ailleurs que j'en avais prescrit la construction. Je dois dire que cette dernière idée paraît avoir été émise successivement par deux autres ingénieurs avant que j'eusse pensé moi-même à cette propriété de ma disposition générale, sans la réminiscence de laquelle d'ailleurs ces ingénieurs n'auraient peut-être pas eu cette idée intéressante. Je n'avais pas pensé non plus à la possibilité d'employer le mouvement acquis, *si l'on arrête le jeu de la machine*, ou plus sûrement si l'on ne produit qu'une grande oscillation de remplissage, à faire ouvrir d'elles-mêmes les portes d'amont et à faire entrer de lui-même le bateau dans le bief d'amont. Mais comme cela peut être considéré comme une conséquence de mes principes et une propriété de la disposition générale que j'avais depuis longtemps décrite et dessinée, je vais entrer dans quelques détails à ce sujet, ayant d'ailleurs ensuite trouvé une manœuvre assez intéressante pour ouvrir les portes d'aval d'elles-mêmes et faire sortir de lui-même le bateau descendant.

On savait depuis longtemps, par l'exemple du canal de Briare, qu'on pouvait faire entrer l'eau dans un sas ou l'en faire sortir par des tuyaux d'une petite longueur appelés *larrons*. Mais, malgré les études faites à l'occasion du bélier hydraulique, personne, à ce qu'il paraît,

ne s'était aperçu qu'en donnant plus de longueur à ces tuyaux, on profiterait de la vitesse acquise de l'eau, si complétement perdue dans les anciennes manœuvres, qu'on n'avait jamais remarqué qu'il en résultât une dénivellation dans le sas à la fin de chaque opération de remplissage ou de vidange.

Je crois être le premier qui ait annoncé et prouvé par l'expérience et le calcul l'avantage de donner une assez grande longueur aux tuyaux des colonnes liquides oscillantes de vitesses et de diamètres convenables. J'ai même eu quelque peine à le faire admettre dans les premiers temps de mon arrivée à Paris, jusqu'à l'époque où M. Coriolis me fit l'honneur de vérifier par l'analyse les résultats que j'avais d'abord obtenus par l'expérience et la Géométrie dans une province reculée où j'avais fait moi-même ma première éducation scientifique, et d'où j'ai apporté à Paris les principes pour lesquels l'Académie des Sciences m'a honoré du prix de Mécanique en 1839.

Personne ne me conteste les expériences dont il s'agit; mais comme un résultat dont je vais parler, qui a été obtenu en Belgique, rappellera plus particulièrement peut-être sur ce sujet l'attention des savants et des ingénieurs, je crois intéressant de déclarer au besoin que, même sans avoir recours au témoignage des ingénieurs qui ont assisté à mes premières expériences, je pourrais prouver légalement une date d'environ trente-quatre ans par une lettre d'un membre de l'Académie des Sciences, pliée de manière à conserver le timbre de la poste du 21 mai 1833.

Sans rappeler ce que j'ai dit dans divers recueils sur la manière d'introduire l'eau dans l'enclave des portes d'aval des écluses de navigation, je mentionnerai, relativement à ce qui suit, un Mémoire inédit que j'ai présenté à l'Académie des Sciences de Paris, et dont un extrait, suffisant pour le point dont il s'agit, est inséré dans les *Comptes rendus*, t. XXVI, p. 409. Voir aussi l'extrait du procès-verbal de la séance de la Société Philomathique de Paris du 14 décembre 1844, journal *l'Institut*, p. 424.

Un des savants les plus distingués de la Belgique, M. Maus, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, membre de l'Académie des Sciences de Bruxelles, m'a communiqué un résultat obtenu sur une des écluses qu'il faisait construire.

L'eau entre dans l'écluse par un long tuyau en maçonnerie de 4 mètres de section, débouchant par une extrémité dans le bief d'amont, et par l'autre dans le sas le plus près possible des portes d'aval. M. Maus n'a pas osé faire déboucher ce tuyau dans l'enclave même des portes d'aval, selon mes prescriptions quant à la forme générale de l'appareil considéré comme moyen d'épargner l'eau, par des raisons relatives à la solidité des constructions dans un mauvais terrain. Il en est résulté que cette extrémité est plus gênée par la présence des bateaux dans l'écluse qu'elle ne devrait l'être dans d'autres localités.

Malgré cette circonstance défavorable, la vitesse acquise dans ce grand tuyau a fait monter l'eau dans l'écluse au-dessus du niveau du bief d'amont. Il en est résulté que les portes d'amont se sont ouvertes d'elles-mêmes, et que le bateau est entré de lui-même dans le bief d'amont.

Je me borne aujourd'hui à signaler ce résultat pratique et simple, sans entrer dans les détails du phénomène, les détails de phénomènes de ce genre étant d'ailleurs décrits en partie dans mes Mémoires. M. Maus a bien voulu me promettre de faire des observations nouvelles sur ces phénomènes, qui pourront être étudiés très en grand. Mais en attendant, il m'a semblé intéressant d'indiquer ce premier résultat, qui permet de simplifier la manœuvre des écluses de navigation, de diminuer le travail de l'éclusier, et surtout de diminuer la durée de cette manœuvre. On sait comment le passage du bateau de l'écluse dans le bief d'amont était une cause de perte de temps.

Lorsque d'ailleurs un bateau descendant entrera ensuite dans l'écluse, il faudra moins de travail et de temps pour l'y faire entrer qu'avant l'existence du grand tuyau dont il s'agit, et dans lequel sera en partie refoulée l'eau, qui autrefois était obligée de passer sous le bateau et le long de ses flancs. Cela rendra désormais sans doute les portes d'amont plus solides et moins coûteuses. On pourra, en effet, supprimer leurs ventelles; les pressions qui les ouvriront ainsi s'exerçant plus régulièrement, ne tendront plus à les gauchir.

D'après ce que m'a dit M. Maus, il a eu l'idée de cette manœuvre sans y avoir été conduit par la considération de la disposition générale de mon système : peut-être en a-t-il eu quelque réminiscence sans s'en rendre compte. Quoi qu'il en soit, il me paraît intéressant de remarquer que cela devait être tôt ou tard une conséquence de cette dispo-

sition générale, en ce sens du moins qu'il eût été difficile d'appliquer en grand mon système de remplissage sans s'apercevoir qu'à partir de l'époque où j'avais prescrit de ne plus faire marcher la machine, mais d'achever le remplissage en laissant le tuyau de conduite entièrement ouvert, le mouvement acquis dans ce tuyau devait *nécessairement* occasionner un exhaussement de l'eau dans le sas, et par suite une indication toute naturelle de ce qui devait se présenter si le remplissage se faisait en une seule oscillation.

Ce moyen de faire ouvrir d'elles-mêmes les portes d'amont et de faire entrer de lui-même le bateau dans le bief d'amont, tel que je viens de dire qu'il a été exécuté en Belgique, à l'écluse d'Herbières, est facile à comprendre quand on connaît la disposition précitée du tuyau d'introduction de l'eau dans l'enclave des portes d'aval de l'écluse à colonne liquide oscillante, que j'ai présentée à l'Académie des Sciences le 3 avril 1848. Un extrait du Mémoire inédit où cette écluse est décrite se trouve avec plus d'étendue que dans les *Comptes rendus*, dans un Mémoire intitulé : « Résumé succinct des expériences de M. Anatole de Caligny sur une branche nouvelle de l'Hydraulique », avec figures, publié dans le *Technologiste*, année 1850, chap. III, numéro de juin, p. 501 et 502, et numéro d'août, p. 603 et 604, fig. 14 et 16, p. 8, 9 et 10 des exemplaires tirés à part, distribués en 1850 à tous les Membres de l'Académie des Sciences de Paris. On va voir que ces idées peuvent avoir d'autres applications assez délicates relativement aux manœuvres du bateau descendant.

M. Maus a exécuté à l'écluse d'Ath, dans l'épaisseur des bajoyers, de longs tuyaux ou aqueducs en maçonnerie ayant chacun 2 mètres carrés de section, ce qui faisait aussi environ 4 mètres carrés de section en somme totale, comme pour le tuyau de l'écluse d'Herbières, mais débouchant par une extrémité dans le bief d'aval, et par l'autre dans l'écluse, près des portes d'amont, au lieu de déboucher près des portes d'aval.

L'application de mes principes au moyen de faire ouvrir d'elles-mêmes les portes d'aval et de faire entrer le bateau de lui-même dans le bief d'aval, en vertu de la vitesse acquise dans un tuyau de conduite, mais dans des sens alternativement différents, n'était pas aussi facile à trouver que la manœuvre relative au bateau montant, pour

laquelle il ne s'agissait que de *laisser agir, sans s'en occuper, le travail rendu disponible par le principe même de l'oscillation, à partir du moment où l'on renoncerait à se servir de la machine pour relever une partie de l'éclusée au bief supérieur.* (Voir la page 603 précitée du *Technologiste.*)

Aussi, quoique M. Maus ait fait une application heureuse de la disposition que j'ai dessinée (et, comme j'en suis persuadé, puisqu'il le dit, sans avoir alors pensé à cette disposition) à la manœuvre du bateau montant à l'écluse d'Herbières, il n'a rien signalé de semblable pour le bateau descendant à l'écluse d'Ath, où les aqueducs de vidange, ayant chacun environ 2 mètres de haut en moyenne sur 1 mètre de large, se trouvent ne pas avoir leur sommet assez au-dessous du niveau du bief d'aval pour que la force vive soit aussi convenablement employée qu'elle pourrait l'être si leur section était plus large et moins haute. Ils sont d'ailleurs étranglés par les bateaux chargés, à cause des endroits où ils débouchent dans l'écluse.

Selon moi, pour faire baisser le niveau convenablement dans l'écluse au-dessous de celui de l'eau dans le bief d'aval, une bonne disposition de ces tuyaux aurait suffi, en vertu de la vitesse acquise mieux employée de l'eau dans ces tuyaux ou aqueducs de vidange, de manière que les portes d'aval se seraient ouvertes d'elles-mêmes.

J'ai donc proposé à M. Maus d'examiner sur les lieux s'il ne serait pas possible de faire l'essai de cette idée que j'ai eue de mon côté, malgré les dispositions existantes, en faisant convenablement exhausser le niveau du bief d'aval au moyen de poutrelles qu'on mettrait en avant de l'écluse suivante. Il paraît que cette expérience pourra être faite de cette manière.

Il y a lieu d'espérer que la dénivellation, suffisante pour que ces portes s'ouvrent d'elles-mêmes sous la pression du bief d'aval, sera trop faible pour qu'il en résulte des inconvénients sérieux provenant, soit du mouvement de cette eau quand elle entrera dans l'écluse, soit de ce que, pour empêcher le bateau de toucher le fond de l'écluse, à cause de cette dénivellation, il faudrait en général sans doute approfondir un peu les écluses auxquelles ce système serait appliqué.

Mais il n'est pas aussi facile de prévoir dans tous leurs détails les phénomènes qui se présenteront quand on voudra faire sortir le ba-

teau du sas dans le bief d'aval. Je suppose que les choses soient disposées, comme elles peuvent l'être, de manière que les portes d'aval s'ouvrent à l'époque où la vitesse de l'eau s'éteindra dans le tuyau ou les tuyaux de vidange. L'eau rentrera en même temps dans l'écluse par ces tuyaux et par ces portes qui s'accrocheront pour rester ouvertes.

On conçoit qu'il doit résulter des vitesses acquises de tout l'ensemble un exhaussement à la suite de l'abaissement qui, dans cette même écluse, aura déterminé les effets précédents, et qu'il pourra résulter de cet exhaussement que le bateau commencera du moins à être poussé vers le bief d'aval d'une manière analogue à celle dont le bateau montant a déjà été poussé dans le bief d'amont.

Mais ensuite il faut tenir compte de ce que l'eau qui reviendra du bief d'aval par ce tuyau ne sera pas dans les mêmes conditions que celle qui, pour le bateau montant, cause un exhaussement au-dessus du niveau du bief d'amont en vertu d'un mouvement acquis auquel il était plus facile de donner une grande intensité, tandis qu'il ne s'agira ici que de profiter d'une simple dénivellation, au lieu de profiter au besoin de toute une opération de remplissage pour engendrer de la vitesse dans un grand tuyau de conduite.

Je suppose le bateau déjà repoussé vers le bief d'aval sans y être encore suffisamment entré, et l'eau redescendue dans l'écluse au niveau de celle de ce bief. Pour qu'il puisse continuer son mouvement de sortie, en vertu des vitesses acquises de tout l'ensemble solide et liquide, il est utile, surtout s'il remplit la plus grande partie de la section transversale, que l'eau du bief d'aval puisse revenir derrière lui, surtout s'il est déjà engagé entre les portes d'aval, afin que cette eau remplisse autant que possible la dénivellation qui tend à se produire derrière lui comme derrière une sorte de piston.

Il est donc, à plus forte raison, important qu'en vertu même de l'exhaussement qui vient de se produire dans l'écluse, l'eau n'ait pas la liberté de reprendre vers cette époque de la vitesse de dedans en dehors du sas dans le tuyau ou les tuyaux de vidange. C'est ce qu'il est facile d'empêcher au moyen de grands clapets qui se fermeront d'eux-mêmes si cet effet tend à se produire, et se rouvriront d'eux-mêmes quand l'eau devra revenir du bief d'aval derrière le bateau sortant.

Il ne paraît pas d'ailleurs absolument indispensable que des clapets ou portes de flot fonctionnent à ces époques de la manœuvre, si le tuyau de conduite a une longueur développée assez grande. La propriété de cette longueur est ici de permettre d'essayer de faire en sorte que le mouvement de l'eau arrivant par ce tuyau de conduite, à l'époque où cette eau coulera de dehors en dedans de l'écluse, ne soit pas éteint avant l'instant où il faudrait précisément rouvrir ce tuyau dans le cas où il aurait été fermé. Il y a lieu d'espérer que, si le tuyau pouvait être assez long, le mouvement de l'eau dans le sens voulu durerait plus que cela ne serait indispensable, et que s'il durait encore au moment où l'on vient de dire qu'il faudrait rouvrir le tuyau dans le cas où ce dernier aurait été fermé, ce mouvement serait une très-bonne chose, puisqu'il amènerait dans le sens voulu de l'eau dont on aurait eu à vaincre l'inertie dans le cas où elle serait partie du repos. Il s'agit d'ailleurs seulement, quant à ce point délicat, de donner une idée purement théorique dont l'expérience seule peut montrer l'utilité, mais qui montre une fois de plus la variété des propriétés de l'inertie des longues colonnes liquides oscillantes.

Autres applications du mouvement oscillatoire des nappes liquides.

Les applications précédentes m'ont semblé très-propres à montrer à quel point pouvaient être généralisées les applications de principes nouveaux dont on tirera sans doute des conséquences auxquelles je n'ai pas pensé. Mais, tout en reconnaissant le mérite de celles qui ont pu être tirées par d'autres, j'ai cru intéressant de rappeler que le premier point de départ date légalement de 1833.

On a proposé, peut-être même avant moi, depuis que j'ai montré d'ailleurs l'utilité de donner une longueur suffisante aux tuyaux de conduite des colonnes liquides oscillantes, de transvaser la plus grande partie de l'eau d'une écluse par une seule grande oscillation. Cela peut se faire de plusieurs façons, par exemple (au moyen d'un grand tuyau de conduite intermédiaire) dans un bassin d'épargne d'où l'on ferait revenir dans l'écluse la plus grande partie de cette eau, aussi

par une seule oscillation. Mais, pour la solution du problème, j'ai proposé un autre genre d'application des oscillations de nappes liquides (voir le *Bulletin de la Société Philomathique de Paris*, séance du 9 novembre 1844). Il s'agit de vider le sas au moyen de plusieurs oscillations successives, dans une série de puits verticaux étagés, de sections moindres que le sas, et dont une partie s'élèvera au-dessus du bief supérieur.

Dans la première oscillation de décharge, il s'élèvera de l'eau au-dessus du bief supérieur. Elle pourra ne pas être la seule pour laquelle il en sera ainsi; mais les décharges successives s'élèveront à des hauteurs d'autant moindres qu'on s'approchera plus de la dernière. Quand on voudra faire rentrer l'eau dans le sas, on fera l'opération inverse, au moyen de plusieurs oscillations successives. D'ailleurs, on pourra achever l'opération par les moyens ordinaires, soit pour la vidange, soit pour le remplissage.

Il résulte de ce que l'opération se fera en plusieurs oscillations, dont le nombre le plus convenable sera réglé par l'expérience, qu'on pourra réduire beaucoup la somme des pertes de force vive, d'après mes expériences sur des sujets analogues.

J'ai cru devoir dire quelques mots de cette manière de considérer le mouvement des nappes liquides, parce que j'ai lieu d'espérer qu'on pourra disposer la grande expérience proposée en ce moment, comme je l'ai dit, par un ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, de manière à étudier aussi la question sous ce point de vue, tout en étudiant l'appareil sous la forme générale qui a été l'objet du Rapport dont j'ai donné ci-dessus un extrait officiel.

ADDITION PRINCIPALEMENT RELATIVE A UN PHÉNOMÈNE DE SUCCION DÉCRIT DANS LE MÉMOIRE PRÉCITÉ PUBLIÉ EN 1862, T. VII, 2e SÉRIE, P. 169 A 200.

Principe d'une nouvelle machine pour les épuisements.

Divers auteurs français et étrangers ont mentionné avec bienveillance, dans leurs ouvrages, dont plusieurs ont été présentés à l'Institut,

l'appareil de mon invention élevant l'eau au moyen d'une chute d'eau, que j'ai communiqué à la Société Philomathique de Paris en novembre 1850, et présenté à l'Académie des Sciences le 2 février 1852. Une Note sur ce sujet se trouve dans les *Comptes rendus* (t. XXXIV, p. 174 à 177). Mais les descriptions et les figures qu'ils en ont données, d'après cette Note succincte, ne s'accordant pas toutes avec celles que j'ai publiées, et surtout avec les nombreux détails que j'ai discutés dans ce journal, quelques observations nouvelles sur mes expériences deviennent d'autant plus intéressantes que cet appareil est maintenant enseigné dans la plupart des Universités de l'Europe. Je crois donc utile de faire une addition à mon Mémoire publié en 1862 dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, 2ᵉ série, p. 169 à 200.

Voici d'abord de quelle manière on a cherché à expliquer, sans me consulter, la cause qui ramène le tube mobile sur son siége fixe, en vertu du mode d'écoulement de l'eau du bief d'amont entre ce siége et une sorte de *parapluie renversé* attaché à la partie inférieure de ce tube mobile qui est vertical.

Comme on a cru que ce siége devait toujours être plongé à une certaine profondeur au-dessous du niveau de l'eau du bief d'aval, on a remarqué que, dans l'état de repos, la pression était sensiblement la même dans le bief d'aval au-dessus et au-dessous du *parapluie renversé*. On a cru qu'il suffisait de tenir compte, à l'époque où l'écoulement se fait de l'amont à l'aval, quand cette dernière pièce est soulevée, de ce que la pression étant diminuée, parce qu'elle l'est selon une loi de Bernoulli dans les tuyaux de conduite en vertu du mouvement acquis, à l'intérieur de l'espèce d'ajutage tronconique dont il s'agit, cela suffisait pour expliquer la force qui ramène le tube mobile sur son siége. En un mot, on attribuait seulement cette force à la pression de l'eau du bief d'aval sur une des faces du parapluie renversé, la pression étant diminuée sur l'autre face.

On en a conclu que, si cette dernière pièce et le siége fixe étaient au-dessus du niveau de l'eau du bief d'aval, non-seulement le tube mobile ne serait point ramené sur son siége en entraînant un contrepoids plus pesant que lui, mais qu'il serait au contraire repoussé de bas en haut en vertu d'un reste de pression de l'eau d'amont. Or cela

est entièrement contraire aux faits observés, même dans des expériences en grand trop nombreuses et ayant duré trop longtemps pour qu'il ait pu rester le moindre doute aux ingénieurs qui y ont assisté.

Je conviens qu'il vaut mieux, en général, que le *parapluie renversé* soit plongé dans l'eau du bief d'aval à une certaine profondeur. C'est en effet dans ces conditions que j'ai tâché de me mettre quand j'ai eu l'honneur d'inviter des Commissions à mesurer l'effet. Heureusement je n'ai pas toujours pu faire ainsi plonger cette pièce, à cause des difficultés du service des eaux. De sorte qu'il est arrivé plusieurs fois qu'aux bassins de Chaillot, en 1853, des Commissions, dont faisaient partie MM. Combes, Séguier et Amédée Durand qui s'en souviennent, ont vu marcher très-régulièrement un appareil de ce système dont le tuyau fixe avait 60 centimètres de diamètre intérieur, la chute motrice moyenne au-dessus du siége fixe dont il s'agit étant de plus de $2^{m},20$ et le siége fixe étant hors de l'eau d'aval. On sait d'ailleurs à Chaillot que cet appareil employant toute l'eau élevée alors par la pompe à feu, quand j'arrivais avant que le bassin servant de bief d'aval fût suffisamment rempli pour l'immersion dont il s'agit, je faisais cependant marcher l'appareil, quelquefois même pendant des heures, pour étudier le phénomène sous toutes ses faces.

Il est bien à remarquer d'ailleurs que la marche, entièrement régulière dans ces conditions, ne devenait plus aussi sûre quand le siége fixe et le *parapluie renversé* n'étaient plongés qu'à une petite profondeur. Ainsi, lorsqu'il y avait seulement une hauteur d'eau de 40 centimètres dans le bief d'aval au-dessus du siége fixe, il se présentait, il est vrai, une série d'ondes assez curieuses qui semblaient devoir être favorables à l'effet utile; car, pendant la sortie de l'eau en aval, il se présentait une onde annulaire plus élevée que le liquide dont le niveau baissait au-dessus du *parapluie renversé*, qui au contraire était recouvert d'une onde plus élevée que le niveau d'aval quand le tube mobile était retombé sur son siége. Or, ce n'était pas à cause d'un défaut de succion que la sûreté du jeu de l'appareil était diminuée dans ces conditions; mais c'était parce que le tube mobile ne se relevait pas toujours assez complétement, par suite des conditions purement hydrostatiques résultant soit des ondes positives, soit des ondes négatives annulaires, combinées d'ailleurs avec la forme de la partie inférieure

du tuyau mobile qui, quoique ayant encore à son pied un diamètre plus grand que celui du tuyau fixe, était cependant un peu conique, ce qui contribuait au soulèvement du tuyau mobile quand l'immersion était plus complète. On conçoit d'ailleurs que le gonflement alternatif au-dessus du *parapluie renversé* ne donnait pas lieu aux mêmes conditions d'équilibre qu'un exhaussement uniforme de l'eau dans le bief d'aval, de sorte qu'en définitive l'oscillation en retour pouvait quelquefois ne pas descendre assez bas pour l'ensemble de ces conditions.

Dans les expériences plus en grand, dont je me suis occupé depuis, avec un tuyau fixe de 1 mètre de diamètre intérieur, la disposition générale du tube mobile n'est plus la même.

Dans les expériences plus anciennes que je rappelle, la forme générale de ce tube avait de l'analogie avec celle d'une sorte de *carafe* sans fond; c'est-à-dire que la partie comprise au-dessous du niveau d'amont s'élargissait, la partie très-allongée comprise au-dessus de ce même niveau se rétrécissait pour s'évaser ensuite au sommet. La pièce centrale fixe, destinée à diminuer la section libre du tube mobile au-dessus de ce même niveau, mais qui en général ne doit pas descendre bien sensiblement au-dessous, ce qui n'a pas été suffisamment remarqué, était combinée avec le système de manière à faire terminer l'oscillation en retour quand le niveau du sommet de la colonne liquide oscillante atteignait à peu près celui de l'eau du bief d'aval, qui devait, comme je viens de le rappeler, s'élever à plus de $0^{m},40$ au-dessus du siége fixe. Cette forme de *carafe* est toujours celle que je préfère dans les limites où elle est possible, quand on veut élever l'eau beaucoup plus haut que la chute motrice.

Mais pour le cas d'une élévation à de très-petites hauteurs, par exemple dans un certain nombre de périodes d'un appareil vidant une écluse de navigation en relevant une partie de l'eau au bief supérieur, si l'on veut une marche automatique à partir d'une certaine baisse, le cas n'est pas le même. Le tube vertical mobile peut alors sans inconvénient être cylindrique, sauf un évasement au sommet. Or, je l'ai même étudié sans cet évasement, son diamètre intérieur étant de $1^{m},10$, et n'étant rétréci à la partie inférieure que par un anneau de 1 mètre de diamètre intérieur. Dans ces conditions, l'appareil ne pourrait pas marcher

abandonné à lui-même sans *parapluie renversé*, si l'explication précitée, qu'on a cherché à donner sans me consulter, était suffisante et exclusive :

Or, quand le niveau est convenablement baissé dans l'écluse, s'il marche avec moins d'avantage lorsqu'on supprime le *parapluie renversé*, il est incontestable qu'il marche abandonné à lui-même. Pendant plusieurs années, un appareil d'essai, provisoirement établi sur une écluse de petite navigation, a fonctionné dans ces conditions en présence d'un nombre considérable de personnes compétentes. Le *parapluie renversé* s'était détaché et n'avait pas été rétabli, parce qu'on n'avait pas besoin de l'appareil à cette écluse, où il ne s'agissait que de faire une étude provisoire; j'ai dit d'ailleurs, depuis, qu'on n'attachait pas d'importance à une marche automatique pour une écluse, le nombre de périodes étant très-petit.

Ce genre de phénomène peut être reproduit en petit dans tous les cabinets de physique.

En 1851 j'ai montré à une Commission d'ingénieurs, au Collége de France, dont M. Combes faisait partie ainsi que M. Amédée Durand, un appareil *avec un parapluie renversé entièrement hors de l'eau du bief d'aval,* et fonctionnant régulièrement avec un tuyau fixe de 5 centimètres seulement de diamètre intérieur.

Aussi, tout en exprimant ma reconnaissance aux savants qui me font l'honneur de signaler mes expériences, je désire qu'on veuille bien ne pas oublier qu'il y a des phénomènes tellement tranchés, que l'illusion n'est pas possible quand on les observe pendant des heures; et que d'ailleurs je n'attache ordinairement de l'importance qu'aux faits qui ont été vérifiés par d'autres personnes, et surtout à ceux *que je peux reproduire quand on le voudra*, soit très en grand, soit très en petit dans les cabinets de physique. Si ces faits sont ensuite contestés par une véritable autorité scientifique, n'est-ce pas une preuve qu'ils étaient bien imprévus? On sait combien une contradiction semblable a fait d'honneur à Montgolfier, quand on vit que son bélier marchait réellement.

Je dois encore signaler une erreur matérielle. On s'est imaginé que cet appareil ne pouvait marcher abandonné à lui-même qu'avec des variations assez limitées dans les hauteurs des niveaux d'amont et d'a-

val, et qu'il fallait par conséquent un surveillant assez intelligent pour régler le contre-poids, ou le flotteur qui en tient lieu quand le système est réduit à n'avoir qu'une seule pièce mobile.

Cette méprise paraît être venue de ce qu'il s'arrête, en effet, quand le niveau d'amont s'élève à une certaine hauteur pour un contre-poids ou un flotteur donné; parce qu'il faut que l'oscillation en retour descende assez bas pour que, la pression sur l'anneau inférieur du tube mobile étant convenablement diminuée, ce tube puisse se lever de lui-même, soit en vertu d'un contre-poids, soit en vertu d'un flotteur. On conçoit donc qu'il faut un *trop-plein* au bief d'amont en l'absence d'un surveillant, à moins qu'on n'ajoute au système un appendice qui n'a pas encore été étudié par l'expérience, et dont j'ai parlé dans mon Mémoire précité de 1862.

Mais des expériences en grand ont démontré, pendant plusieurs années, que l'appareil entièrement abandonné à lui-même marchait régulièrement, malgré des variations énormes dans les hauteurs du niveau du bief d'amont, c'est-à-dire en vidant une écluse de navigation, à partir d'une certaine baisse du niveau dans l'écluse.

Quant au niveau d'aval, on a constaté en 1853, dans les bassins de Chaillot, pendant le remplissage du bassin servant de bief d'aval, que les variations du niveau de l'eau dans ce bief pouvaient être énormes sans arrêter l'appareil.

En définitive, soit en amont, soit en aval, les niveaux peuvent avoir de très-grandes variations, mais on ne peut se dissimuler qu'il faut jusqu'à présent un trop-plein quand il n'y a pas de surveillant pour le bief d'amont.

L'étendue de cette Note ne me permettant pas de discuter les principes de ce système pour lesquels je renvoie dans ce journal à mon Mémoire de 1862, j'ai seulement ici pour but de rétablir les faits dernièrement encore étudiés sur une plus grande échelle. J'ajouterai donc seulement que, dans mes expériences sur un tuyau de 1 mètre de diamètre, en tôle, je suis parvenu à diminuer beaucoup l'angle du *parapluie renversé* avec la verticale, c'est-à-dire à faire cet angle égal à la moitié d'un droit, en étudiant le degré d'immersion dans le bief d'aval, qui permet d'obtenir, de la manière la plus avantageuse, une sorte de remous annulaire reposant sur les mêmes principes que les remous ou

ressauts qui ont été observés dans les coursiers en aval des roues hydrauliques verticales à grandes vitesses. Ce remous m'a permis de combiner d'une manière utile à la succion la force centrifuge de l'eau qui se plie sous le *parapluie renversé.*

Cet appareil, pour un tuyau de conduite fixe de 1 mètre de diamètre, a fonctionné aussi de lui-même quand il n'y avait pas d'eau dans le bief d'aval. Cette expérience a été répétée en mon absence par M. Loyal, conducteur des Ponts et Chaussées.

Mais il ne s'agit pas seulement de l'interprétation d'un phénomène de physique. La forme sous laquelle cet appareil a fonctionné, *le siége fixe étant entièrement hors de l'eau* du bief d'aval, permet de le transformer de la manière suivante en machine pour les épuisements.

Si le tube vertical mobile est suffisamment prolongé par le sommet afin que l'eau ne puisse sortir par ce sommet, la colonne liquide, dans son oscillation en retour, pourra descendre beaucoup plus bas dans la partie recourbée verticalement du tuyau fixe, bien au-dessous du niveau du bief d'aval. On conçoit donc que si une soupape est disposée dans une tubulure latérale en communication avec de l'eau à épuiser, dont le niveau est au-dessous de celui de l'eau du bief d'aval, cela suffit pour qu'il entre alternativement de l'eau à épuiser quand la colonne liquide sera suffisamment descendue à l'intérieur du système, comme je viens de montrer que cela peut se faire en vertu d'une oscillation en retour.

Si cette soupape est par exemple un simple clapet, on conçoit qu'elle peut se refermer d'elle-même quand la colonne liquide remontera pour verser l'eau à épuiser au-dessus du siége fixe sous le tube mobile qui sera relevé. Le jeu de l'appareil continuera ainsi de suite indéfiniment au moyen de la chute d'eau motrice, comme s'il s'agissait d'un appareil simplement élévatoire. On pourrait même, si l'on voulait, donner au tube vertical mobile une hauteur telle que l'appareil servirait en même temps à faire des épuisements et à jeter une certaine quantité d'eau au sommet du tube mobile.

Ce qui précède suffit pour exposer le principe. Il y a évidemment un certain désavantage à jeter l'eau motrice au-dessus du niveau du bief d'aval, au lieu de la faire déboucher en dessous, comme pour l'appareil simplement élévatoire. Mais ces divers principes peuvent

avoir leurs avantages dans certaines circonstances, et il est toujours intéressant de remplir une case de la science, même abstraction faite des applications immédiates.

Il ne paraît pas d'ailleurs nécessaire d'employer une soupape latérale. Supposons que le tube fixe se bifurque au-dessous du niveau de l'eau à épuiser, la plus courte branche de cette bifurcation se relevant verticalement pour recevoir un second tube vertical mobile, aussi élevé par le sommet que le premier, et disposé d'ailleurs d'une manière analogue, avec balancier, etc. L'eau s'élèvera alors dans ce tube mobile en même temps que dans l'autre, parce qu'on le suppose baissé quand l'eau montera dans cet autre tube.

L'eau redescendra ensuite dans ces deux tubes mobiles; celui qui existait déjà pour l'appareil considéré simplement comme élévatoire, se lèvera d'abord de lui-même comme pour la machine élévatoire, lorsqu'en vertu de l'oscillation en retour l'eau sera suffisamment descendue à son intérieur pour ne plus équilibrer sur son anneau inférieur le contre-poids de son balancier.

L'eau continuera à descendre dans la branche latérale de la bifurcation, et dans le tube mobile disposé sur cette dernière branche. Ce tube mobile se lèvera ensuite de lui-même, en vertu du même principe qui aura fait lever l'autre quand l'eau sera suffisamment descendue à son intérieur. Alors, l'eau à épuiser entrera dans le système par la branche la plus courte de la bifurcation, jusqu'à ce que le mouvement en retour vers le bief d'amont soit éteint.

Il reviendra ensuite une certaine quantité d'eau du bief d'amont vers le point d'où on l'a épuisée. Mais dans ce sens du mouvement de l'eau, il se développera des causes de succion beaucoup plus puissantes que la simple pression hydrostatique, à laquelle on pourrait avoir à résister pour tenir soulevé le tube mobile qui a permis à l'eau à épuiser d'entrer dans le système.

Il est facile de voir, en effet, que cette dernière force ne peut provenir, pendant le mouvement de l'extérieur à l'intérieur du système, que de la diminution de pression résultant, d'après un principe de Bernoulli sur le mouvement des liquides dans les tuyaux, de ce que l'eau est en mouvement sous le *parapluie renversé* ou sous l'anneau quelconque disposé à la partie inférieure de ce tube mobile. Le phé-

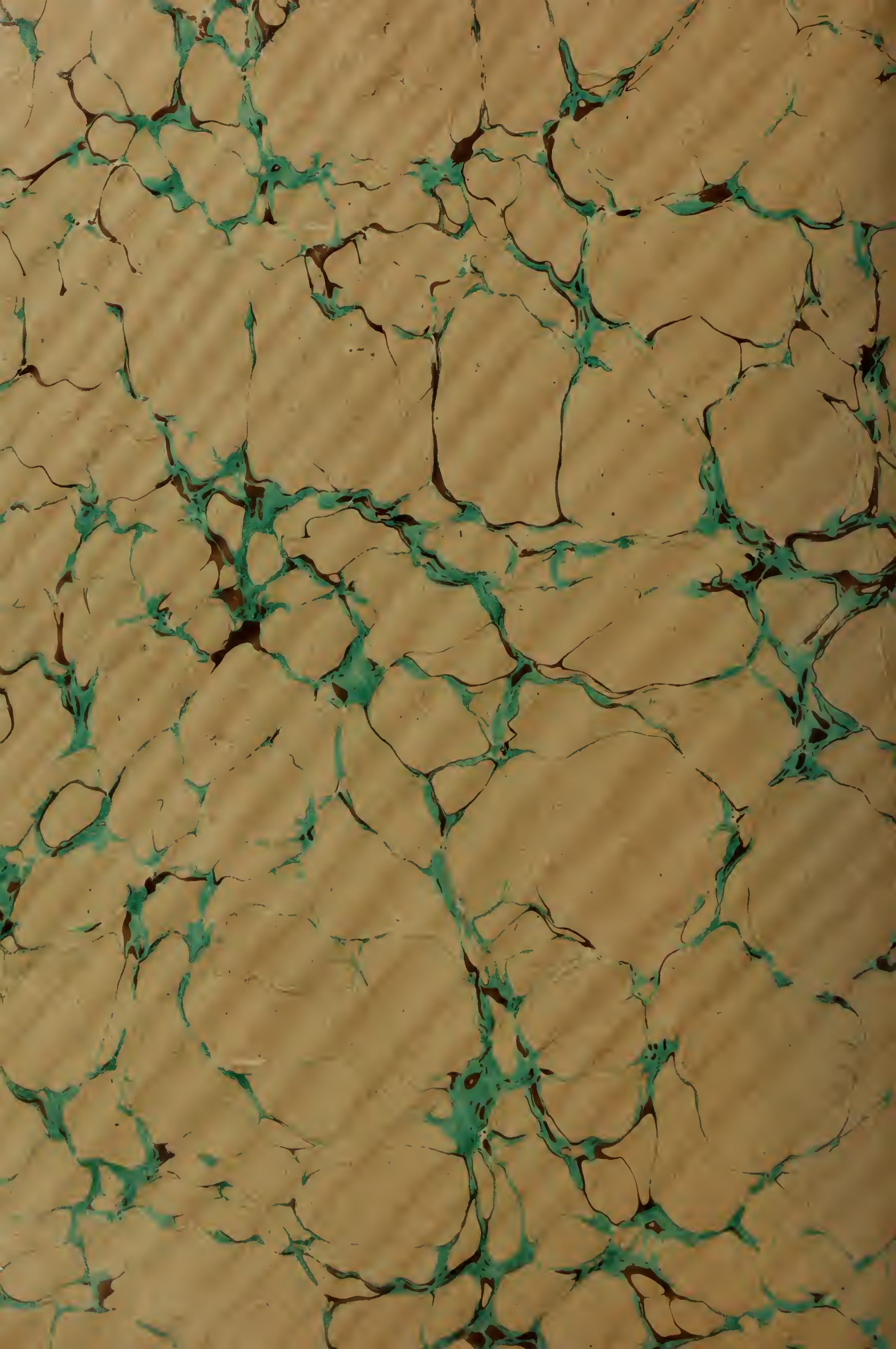
nomène est alors très-différent de ce qui se présente pour le mouvement de bas en haut déjà observé sous le *parapluie renversé* de l'autre tube mobile. Quant à celui dont il s'agit en ce moment, il est bien vrai que *s'il n'était pas* recouvert d'eau, la pression de l'eau entrant dans le système tendrait à le soulever. Car il ne faut pas du tout confondre les phénomènes du mouvement de l'eau de dehors au dedans avec ceux du mouvement de l'eau de dedans en dehors; les principes sont tout à fait différents.

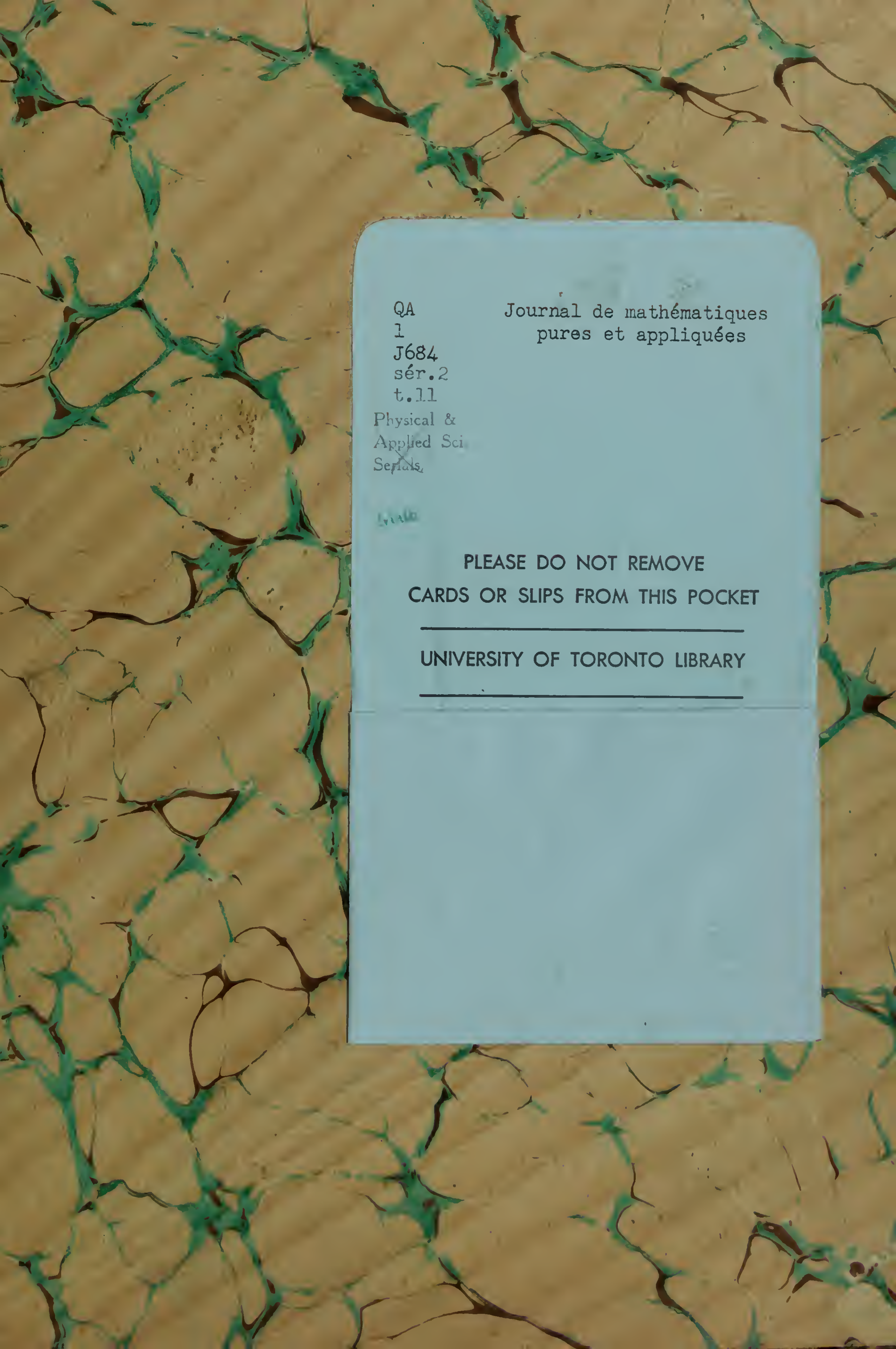
On peut en définitive calculer la limite de non-pression dont il faudra se défier pendant l'entrée de l'eau à épuiser. Mais pour ramener ensuite sur son siége le tube dont la levée aura permis l'entrée de cette eau, on aura une force du genre de celle que l'on sait capable de ramener l'autre tube mobile sur son siége, et qu'il faut même modérer dans certains cas pour ne point endommager les appareils. Elle se compose de plusieurs forces distinctes, notamment des effets de la force centrifuge, des effets analogues à ceux des ajutages divergents, etc., qui ont été discutés dans mon Mémoire précité, publié dans ce journal en 1862.

Je n'entrerai pas ici dans plus de détails à ce sujet; un simple clapet indiqué ci-dessus sera peut-être plus pratique que le second tube dont je viens de parler. Mais il était intéressant d'entrer dans cette discussion relative à un exemple d'application, pour considérer sous ses diverses faces un phénomène tellement nouveau, qu'il a été contesté par une haute autorité scientifique, et de montrer comment on peut isoler, en changeant le sens du mouvement, la loi de Bernoulli sur la diminution de pression dans l'eau en mouvement. Cette loi se trouvait réunir ses effets à plusieurs autres dans l'appareil simplement élévatoire, tel qu'il a fonctionné à l'Exposition universelle de 1855, dont le Jury international m'a honoré d'une médaille de première classe.

FIN DU TOME ONZIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.





QA
1
J684
sér.2
t.11
Physical &
Applied Sci
Serials
Journal de mathématiques
pures et appliquées
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

